Laboratorio di Matematica - I Modulo, LMSIA; Lezione IV

La lezione si riferisce a SB, Capitolo 3 "Funzioni di piu' variabili", piu' precisamente ad alcune parti dei paragrafi 3.1 "Funzioni definite tra spazi euclidei", 3.2 "Rappresentazione geometrica delle funzioni", 3.3 "Funzioni particolari", 3.5 "Terminologia relativa alle funzioni".

- **Concetto di funzione.**

  Una funzione da un insieme a un altro e' una regola che assegna a ogni elemento del primo insieme uno e un solo elemento del secondo; il primo insieme e' detto dominio della funzione, il secondo insieme e' detto codominio della funzione. Una funzione f di dominio A e codominio B viene rappresentata con la scrittura

  $$f : A \to B.$$

  A ciascun elemento $x \in A$, la funzione associa un elemento $f(x) \in B$, detto immagine di x tramite f; le immagini degli elementi di A tramite f formano un sottinsieme $f(A)$ di B, detto insieme immagine di A tramite f :

  $$f(A) := \{f(x);\ x \in A\}.$$

  Per ciascun elemento $y \in B$, possiamo considerare gli eventuali elementi di A la cui immagine e' y; questi elementi formano un sottinsieme $f^{-1}(y)$ di A, detto preimmagine di y :

  $$f^{-1}(y) := \{x \in A :\ f(x) = y\}.$$

  Nel caso in cui $B = \mathbb{R}$, questo insieme viene detto insieme di livello y, o curva di livello y. Questi termini vengono suggeriti dal caso particolare delle carte topografiche.

  Per ciascun $x \in A$, possiamo considerare la coppia ordinata $(x, f(x))$ nel prodotto cartesiano $A \times B$; queste coppie ordinate formano un sottinsieme di $A \times B$, detto grafico di f :

  $$grafico\ di\ f\ := \{(x, f(x));\ x \in A\} \subset A \times B.$$

  Il concetto di funzione puo' essere dato anche in una forma leggermente diversa, come nel "Dizionario di Matematica", 1989, Rizzoli:

  "funzione: corrispondenza tra due variabili x e y, che associa a ogni valore assunto dalla x (detta variabile indipendente) un valore della y (variabile dipendente); tale corrispondenza viene rappresentata col simbolo $y = f(x)$, che si legge y funzione di x. L'insieme X dei valori assunti dalla x si chiama insieme di definizione o dominio della funzione; l'insieme Y dei valori di y si chiama insieme di variabilita' o codominio. ..."

  "variabile: quantita' suscettibile di assumere tutti i valori appartenenti a un dato insieme I."

- **Esempio 1**

  Consideriamo la funzione
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \qquad f(x,y) = \frac{x}{4} + \frac{y}{5}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$
  L'immagine di $(1,2)$ e' data da $f(1,2) = \frac{1}{4} + \frac{2}{5} = \frac{13}{20} = 0.65$.

  La curva di livello 1 e' data da

  $f^{-1}(1) = \{(x,y);\ \frac{x}{4} + \frac{y}{5} = 1\}$,

  cioe' dalle soluzioni della equazione $\frac{x}{4} + \frac{y}{5} = 1$. Si tratta di una retta del piano $\mathbb{R}^2$, la retta che interseca gli assi nei punti $(4,0)$ e $(0,5)$. Per ciascun $z \in \mathbb{R}$, la curva di livello z e' data da
$$f^{-1}(z) = \{(x,y);\ \frac{x}{4} + \frac{y}{5} = z\},$$
  cioe' dalle soluzioni della equazione $\frac{x}{4} + \frac{y}{5} = z$. Si tratta di una retta del piano $\mathbb{R}^2$, la retta che interseca gli assi nei punti $(4z,0)$ e $(0,5z)$. Al variare di $z \in \mathbb{R}$, queste rette costituiscono un fascio di rette parallele.

  Rappresentando su un foglio alcune di queste curve di livello, possiamo allora immaginare il grafico di f, e intuire che si tratta di un piano.

  Da un ltro punto di vista, il grafico di f e' dato da
$$grafico\ di\ f\ := \{(x,y,\frac{x}{4} + \frac{y}{5});\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\}.$$
  Osserviamo che

  $(x,y,\frac{x}{4} + \frac{y}{5}) = x(1,0,\frac{1}{4}) + y(0,1,\frac{1}{5})$;

  dunque il grafico di f appare come l'insieme delle combinazioni lineari di due vettori linearmente indipendenti, il quale insieme e' un piano.

- **Esempio 2**

  Consideriamo la funzione
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \qquad f(x,y) = x^2 + y^2, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$
  La curva di livello 1 e' data dalle soluzioni dell'equazione

  $x^2 + y^2 = 1$.

  Si tratta di una circonferenza del piano $\mathbb{R}^2$, la circonferenza con centro nell'origine $(0,0)$ e raggio 1. La curva di livello z e' data dalle soluzioni dell'equazione
$$x^2 + y^2 = z,$$
  nelle variabili x, y. Per $z \geq 0$, si tratta di una circonferenza del piano $\mathbb{R}^2$, la circonferenza con centro nell'origine $(0,0)$ e raggio $\sqrt{z}$. Per $z < 0$, si tratta dell'insieme vuoto.

  Rappresentando su un foglio alcune di queste curve di livello, possiamo allora immaginare il grafico di f, e intuire che si tratta di un paraboloide di rotazione, ottenuto facendo ruotare una parabola attorno al suo asse.

  Il grafico di questa funzione si puo' visualizzare con "maxima", dando l'istruzione

```
plot3d(x^2+y^2,[x,-2,2],[y,-2,2],[grid,12,12])
```

Variando i parametri della funzione "plot3d" si possono ottenere rappresentazioni piu' o meno fini su domini piu' o meno ampi.

Per esercizio, per la funzione

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \qquad f(x, y) = xy, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

si rappresentino le curve di livello, si utilizzino queste curve per farsi un'idea del suo grafico, e infine si visualizzi il grafico con "maxima". Lo stesso con la funzione

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \qquad f(x, y) = x^2 - y^2, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

- **Esempio 3**

  Consideriamo la funzione

  $$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2; \qquad f(t) = (2t, 5t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

  Possiamo pensare che questa funzione descriva il moto di un punto nel piano, nel senso che $f(t)$ rappresenti la posizione occupata dal punto all'istante t.

  L'immagine di $\mathbb{R}$ tramite f puo' essere pensata come la traiettoria descritta dal punto, ed e' data da

  $$f(\mathbb{R}) := \{(2t, 5t);\ t \in \mathbb{R}\}.$$

  Osserviamo che $(2t, 5t) = t(2, 5)$; dunque la traiettoria e' una retta. In realta', questo moto e' un moto rettilineo uniforme.

- **Funzioni Lineari - Introduzione**

  Fra le funzioni da $\mathbb{R}^n$ verso $\mathbb{R}$, le piu' "semplici" dopo le funzioni costanti sono le funzioni omogenee di primo grado, del tipo

  $$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}; \qquad f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n, \quad x_i \in \mathbb{R},$$

  dove $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sono costanti in $\mathbb{R}$. Posto $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \underline{a}$, e $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \underline{x}$, possiamo rappresentare sinteticamente f nella forma

  $$f(\underline{x}) = \underline{a} \cdot \underline{x},$$

  cioe' f appare come la funzione che a ciascun vettore di $\mathbb{R}^n$ associa il suo prodotto interno col vettore $\underline{a}$.

  Osserviamo che questa funzione si comporta bene rispetto all'addizione di vettori:

  $$\begin{aligned} f(\underline{x}^{(1)} + \underline{x}^{(2)}) &= \underline{a} \cdot \left(\underline{x}^{(1)} + \underline{x}^{(2)}\right) \\ &= \underline{a} \cdot \underline{x}^{(1)} + \underline{a} \cdot \underline{x}^{(2)} \\ &= f(\underline{x}^{(1)}) + f(\underline{x}^{(2)}) \end{aligned}$$

  e alla moltiplicazione di scalari per vettori:

  $$\begin{aligned} f(\alpha\underline{x}) &= \underline{a} \cdot (\alpha\underline{x}) \\ &= \alpha\,(\underline{a} \cdot \underline{x}) \\ &= \alpha f(\underline{x}). \end{aligned}$$

  Una funzione con queste proprieta' si dice *funzione lineare*.