Laboratorio di Matematica, A.A. 2009-2010; I modulo;

Lezione V.

1. Definizione di funzione lineare f da $\mathbb{R}^k$ a $\mathbb{R}^m$ come una funzione f che soddisfa le proprieta'

$$f(\underline{x}+\underline{y}) = f(\underline{x}) + f(\underline{y})$$
$$f(\alpha\underline{x}) = \alpha f(\underline{x}),$$

per ogni $\underline{x}, \underline{y}$ in $\mathbb{R}^k$ ed ogni α in $\mathbb{R}$.

Teorema di caratterizzazione delle funzioni lineari da $\mathbb{R}^k$ a $\mathbb{R}$ come funzioni del tipo

$$f(x_1, \ldots, x_k) = a_1x_1 + \cdots + a_kx_k,$$

dove $a_1, \ldots, a_k$ sono numeri reali, cioe' come funzioni del tipo

$$f(\underline{x}) = \underline{a} \cdot \underline{x},$$

dove $\underline{a}$ e' un vettore in $\mathbb{R}^k$.

Teorema di caratterizzazione delle funzioni lineari da $\mathbb{R}^k$ a $\mathbb{R}^m$ come funzioni del tipo

$$f(x_1, \ldots, x_k) = (a_{11}x_1 + \cdots + a_{1k}x_k, \ldots, a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mk}x_k)$$

dove $a_{11}, \ldots, a_{mk}$ sono costanti reali, cioe' come funzioni del tipo

$$f(\underline{x}) = A\underline{x},$$

dove A e' una matrice reale di tipo $m \times k$.

2. Definizione di funzione quadratica Q da $\mathbb{R}^k$ a $\mathbb{R}$ come una funzione del tipo

$$Q(x_1, \ldots, x_k) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq k} a_{ij}x_ix_j, \qquad (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k.$$

Rappresentazione delle funzioni quadratiche da $\mathbb{R}^k$ a $\mathbb{R}$ nella forma

$$f(\underline{x}) = \underline{x}^T A\underline{x}, \qquad \underline{x} \in \mathbb{R}^k,$$

con A matrice reale simmetrica di tipo $k \times k$.

Definizione di funzione polinomiale da $\mathbb{R}^k$ a $\mathbb{R}$, e piu' in generale da $\mathbb{R}^k$ a $\mathbb{R}^m$.

3. Definizione di funzione continua da $\mathbb{R}^k$ a $\mathbb{R}^m$.

Teorema di caratterizzazione delle funzioni continue come funzioni aventi tutte le funzioni componenti scalari continue.

Teorema sul buon comportamento della continuita' rispetto alle operazioni algebriche sulle funzioni. [1]

---

[1] **Th.** Se $f, g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ sono funzioni continue in un punto $\underline{x}$, allora anche la funzione somma $f+g$, la funzione prodotto fg, e per $f(\underline{x}) \neq 0$ la funzione quoziente f/g, sono funzioni continue in $\underline{x}$.

Teorema sulle preimmagini di chiusi, e di aperti, mediante funzioni continue. [2] Applicazioni. [3]

Teorema del buon comportamento della continuita' rispetto alla composizione di funzioni.

Esempio di funzione da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}$ avente restrizioni continue su ogni retta passante per l'origine, ma discontinua nell'origine. [4]

Riferimenti.

Per i punti 1,2: SB, Cap. 3, par. 3.3 p.48-53.

Per il punto 3: SB, Cap. 3, par. 3.4 p.48-49, e par. 3.5 p.59-60.

---

[2]**Th.** Se $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ e' una funzione continua, allora: la preimmagine $f^{-1}(C)$ di un qualsiasi insieme chiuso $C \subseteq \mathbb{R}^m$ e' un insieme chiuso in $\mathbb{R}^k$; la preimmagine $f^{-1}(A)$ di un qualsiasi insieme aperto $A \subseteq \mathbb{R}^m$ e' un insieme aperto in $\mathbb{R}^k$.

[3]**Prop.** Siano date m funzioni $f_1, \ldots, f_m$ continue da $\mathbb{R}^k$ a $\mathbb{R}$, ed m scalari $c_1, \ldots, c_m$ in $\mathbb{R}$. Allora l'insieme delle soluzioni del sistema di disuguaglianze deboli

$$\begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_k) \leq c_1 \\ \vdots \\ f_m(x_1, \ldots, x_k) \leq c_m \end{cases}$$

e' un sottinsieme chiuso di $\mathbb{R}^k$, e l'insieme delle soluzioni del sistema di disuguaglianze forti

$$\begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_k) < c_1 \\ \vdots \\ f_m(x_1, \ldots, x_k) < c_m \end{cases}$$

e' un sottinsieme aperto di $\mathbb{R}^k$.

[4]Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2}{y} & y \neq 0 \\ & \\ 0 & y = 0 \end{cases}.$$

Si ha che per ogni successione di punti di $\mathbb{R}^2$ che tende all'origine lungo una retta, la successione delle immagini converge a zero, che e' il valore della funzione nell'origine. Se si prende una successione di punti di $\mathbb{R}^2$ che tende all'origine lungo la parabola $y = x^2$, la successione delle immagini converge a 1, che non e' il valore della funzione nell'origine.