Laboratorio di Matematica, A.A. 2009-2010; I modulo;

Lezione VII.

1. Nel seguito, quando non ci sia possibilita' di fraintendimento, i punti di $\mathbb{R}^n$ verranno indicati con lettere minuscole non sottolineate; di solito, se un punto di $\mathbb{R}^n$ viene indicato con una lettera, le coordinate del punto verranno indicate con la stessa lettera con indici, come in $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Per indicare piu' punti di $\mathbb{R}^n$, a volte useremo lettere minuscole con apici, come in $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$, o $x^1 = (x_1^1, \ldots, x_n^1)$.

2. Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione definita su un aperto $A \subseteq \mathbb{R}^n$, e siano x^0 un punto di A e j un indice, con $1 \leq j \leq n$. Il limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_1^0, \ldots, x_{j-1}^0, x_j^0 + h, x_{j+1}^0, \ldots, x_n^0) - f(x_1^0, \ldots, x_{j-1}^0, x_j^0, x_{j+1}^0, \ldots, x_n^0)}{h},$$

qualora esista finito, viene detto *derivata parziale di f rispetto a x_j nel punto x^0*, e viene indicato con

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x^0).$$

In breve, indicato con e^j il $j-mo$ vettore della base canonica di $\mathbb{R}^n$, si puo' anche scrivere

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x^0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x^0 + he^j) - f(x^0)}{h}.$$

Supponiamo che in x^0 esistano tutte le derivate parziali di f. Queste derivate parziali formano un vettore

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^0) \right) =: \nabla f(x^0),$$

che viene detto *gradiente* della funzione f nel punto x^0.

A questo vettore corrisponde la funzione lineare $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definita da

$$h \mapsto \nabla f(x^0) \cdot h,$$

cioe'

$$(h_1, \ldots, h_n) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0)h_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^0)h_n,$$

che viene detta *differenziale* della funzione f nel punto x^0.

3. Possiamo approssimare i valori $f(x^0+h)$ della funzione f nelle vicinanze del punto x^0 con il polinomio $f(x^0)+\nabla f(x^0)\cdot h$ di grado al piu' uno nelle variabili $h_1, \ldots, h_n$; facendo cio', commettiamo un errore $R(x^0; h)$, definito dall'uguaglianza

$$f(x^0 + h) = f(x^0) + \nabla f(x^0) \cdot h + R(x^0; h).$$

Sotto certe condizioni di regolarita' sulla funzione f, l'approssimazione e' buona.

Precisamente, se tutte le derivate parziali di f esistono in un intorno di x^0, e se ciascuna di esse e' continua in x^0, allora si ha

$$\lim_{h \mapsto 0} \frac{R(x^0; h)}{\|h\|} = 0,$$

cioe' l'errore $R(x^0; h)$ associato all'incremento h tende a zero piu' rapidamente di h.

4. **Esempio**

   Consideriamo la funzione

   $$f(x, y) = x^y,$$

   definita sull'insieme aperto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x > 0\}$.

   Si osservi che

   $x^y = \left(e^{\log x}\right)^y = e^{y \log x}$.

   La funzione f possiede derivate parziali in ciascun punto di A :

   $$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^y\right) = y x^{y-1}$$
   $$\frac{\partial}{\partial y}\left(x^y\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{y \log x}\right) = e^{y \log x} \log x = x^y \log x.$$

   Ciascuna delle due derivate parziali e' continua su A.

   Consideriamo il punto $(2, 3)$. In esso la funzione e le sue derivate parziali valgono:

   $f(2, 3) = 8, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(2, 3) = 12, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(2, 3) = 8 \log 2.$

   Possiamo approssimare i valori $f(2 + h, 3 + k)$ della funzione f nelle vicinanze del punto $(2, 3)$ con il polinomio $f(2, 3) + \nabla f(2, 3) \cdot (h, k)$ di grado al piu' uno nelle variabili h, k; facendo cio', commettiamo un errore $R(2, 3; h, k)$, definito dall'uguaglianza

   $$f(2 + h, 3 + k) = f(2, 3) + \nabla f(2, 3) \cdot (h, k) + R(2, 3; h, k),$$

   cioe'

   $$(2 + h)^{3+k} = 8 + 12h + (8 \log 2)\, k + R(2, 3; h, k)$$

   Questa approssimazione e' buona, nel senso che

   $$\lim_{(h,k) \mapsto (0,0)} \frac{R(2, 3; h, k)}{\|(h, k)\|} = 0.$$

5. Sia $x : I \to \mathbb{R}$ una funzione definita su un intervallo aperto $I \subseteq \mathbb{R}$ a valori in $\mathbb{R}^n$, e sia t_0 un punto di I. Il limite

   $$\lim_{h \to 0} \frac{x(t_0 + h) - x(t_0)}{h},$$

   qualora esista finito, viene detto *derivata* della funzione x nel punto t_0, e viene indicato con

   $$x'(t_0).$$

La funzione x associa a ciascun punto t in A un vettore $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ in $\mathbb{R}^n$; ciascuna componente $x_i(t)$ definisce una funzione $x_i : I \to \mathbb{R}$. Si ha che esiste la derivata $x'(t_0)$ se e solo se esistono tutte le derivate $x_i'(t_0)$, e in tal caso si ha

$$x'(t_0) = (x_1'(t_0), \dots, x_n'(t_0)).$$

Per $n = 2$, possiamo pensare che la variabile t rappresenti il tempo, e che $x(t)$ rappresenti la posizione occupata da un punto materiale al tempo t, cosicche' la funzione x rappresenti il moto del punto. L'incremento

$$x(t_0 + h) - x(t_0)$$

rappresenta il vettore spostamento del punto materiale dall'istante t_0 all'istante $t_0 + h$, il rapporto incrementale

$$\frac{x(t_0 + h) - x(t_0)}{h}$$

rappresenta il vettore velocita' media del punto materiale nell'intervallo di tempo $[t_0, t_0 + h]$, e la derivata

$$x'(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{x(t_0 + h) - x(t_0)}{h}$$

rappresenta il vettore velocita' istantanea del punto materiale all'istante t_0. Il vettore $x'(t_0)$ individua la tangente nel punto $x(t_0)$ alla traiettoria descritta dal punto materiale.

6. **Esempio**

   Sia $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ la funzione definita da

   $$x(t) = (t^2, t^3), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

   Questa funzione e' derivabile in ogni punto del suo dominio, e si ha

   $$x'(t) = (2t, 3t^2).$$

   Nell'interpretazione cinematica, abbiamo ad esempio che all'istante $t = 1$ il punto materiale occupa la posizione $x(1) = (1, 1)$ ed ha velocita' istantanea $x'(1) = (2, 3)$. Il vettore $(2, 3)$ individua la tangente nel punto $(1, 1)$ alla traiettoria descritta dal punto materiale.

7. Siano

   $$\begin{aligned} &x : I \to \mathbb{R}^n, \qquad I \subseteq \mathbb{R},\ \textit{I intervallo aperto} \\ &f : A \to \mathbb{R}, \qquad A \subseteq \mathbb{R}^n,\ \textit{A aperto}, \end{aligned}$$

   dove $x(I) \subset A$, cosicche' si possa considerare la funzione composta

   $$f \circ x : I \to \mathbb{R}.$$

   Sia t_0 un punto di I. Supponiamo che:

- esista la derivata di x in t_0;
- esistano tutte le derivate parziali di f in un intorno di $x(t_0)$, e che ciascuna di esse sia continua in $x(t_0)$.

Allora esiste la derivata della funzione $f \circ x$ in t_0, e

$$(f \circ x)'(t_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x(t_0))x_i'(t_0) = \nabla f(x(t_0)) \cdot x'(t_0).$$

8. **Esempio**

Siano

$$\begin{aligned} x(t) &= (t^2, t^3) & t \in \mathbb{R};\ t > 0 \\ f(x,y) &= x^y & (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x > 0 \end{aligned}$$

I valori assunti dalla funzione x appartengono al dominio di definizione della funzione f, cosicche' possiamo considerare la funzione composta

$$(f \circ x)(t) = f(x(t)) = f(t^2, t^3) = t^{2t^3}.$$

Per ogni $t \in \mathbb{R}$, esiste la derivata $x'(t) = (2t, 3t^2)$; per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, con $x > 0$, esistono le due derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = yx^{y-1}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^y \log x$, entrambe continue nel dominio di definizione di f.

Allora per ogni $t > 0$ esiste la derivata della funzione $f \circ x$ in t, e

$$(f \circ x)'(t) = \nabla f(x(t)) \cdot x'(t).$$

In particolare, per $t = 1$ si ha

$$(f \circ x)'(1) = \nabla f(x(1)) \cdot x'(1) = \nabla f(1,1) \cdot x'(1) = (1,0) \cdot (2,3) = 2.$$

Per esercizio, si verifichi il risultato calcolando la derivata di $(f \circ x)(t) = t^{2t^3}$ direttamente e poi valutandola in $t = 1$.

Riferimenti.

Per i punti 2,3: SB, Cap. 4, par. 4.1 p.61-62, par. 4.8 p.91-92.

Per i punti 5,7: SB, Cap. 4, par. 4.5 p.73-78.