Laboratorio di Matematica, A.A. 2009-2010; I modulo;

Lezione VIII.

1. Nel piano, dati un punto $p = (p_1, p_2)$ e un vettore $v = (v_1, v_2)$, si ha che il moto di un punto materiale che all'istante $t = 0$ si trova in p e che si muove con velocita' costante v e' descritto dalla funzione $x = (x_1, x_2) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ data da

$$x(t) = p + tv, \qquad t \in \mathbb{R},$$

cioe'

$$\begin{cases} x_1(t) = p_1 + tv_1 \\ x_2(t) = p_2 + tv_2 \end{cases}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Se v e' diverso dal vettore nullo, la traiettoria descritta dal punto e' la retta passante per p parallela al vettore v.

Dati in $\mathbb{R}^n$ un punto $p = (p_1, \ldots, p_n)$ e un vettore $v = (v_1, \ldots, v_n)$, possiamo considerare la funzione $x = (x_1, \ldots, x_n) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, data da

$$x(t) = p + tv, \qquad t \in \mathbb{R},$$

cioe'

$$\begin{cases} x_1(t) = p_1 + tv_1 \\ \vdots \\ x_n(t) = p_n + tv_n \end{cases}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Se v e' diverso dal vettore nullo, l'immagine $x(\mathbb{R})$ di $\mathbb{R}$ tramite questa funzione x viene detta *retta* di $\mathbb{R}^n$ passante per il punto p e parallela al vettore v.

2. Sia date una funzione

$$f : A \to \mathbb{R}, \qquad A \subseteq \mathbb{R}^n,\ A \textit{ aperto},$$

un punto p in A, e supponiamo che esistano le derivate parziali di f in un intorno di p, continue in p. Dato un vettore non nullo v in $\mathbb{R}^n$, consideriamo la funzione

$$x : I \to \mathbb{R}^n, \qquad x(t) = p + tv, \quad t \in \mathbb{R},$$

dove I e' un intervallo aperto sufficientemente piccolo affinche' $x(I) \subset A$. Si ha $x(0) = p$; la funzione x e' derivabile in ogni punto del suo dominio, e $x'(t) = v$ per ogni t. Per il teorema di derivazione lungo una curva, si ha che la funzione composta

$$f \circ x : I \to \mathbb{R}$$

e' derivabile in $t = 0$, e

$$(f \circ x)'(0) = \nabla f(p) \cdot v = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) v_i.$$

Si noti che $(f \circ x)(t) = f(x(t)) = f(p + tv)$, cosicche'

$$(f \circ x)'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{(f \circ x)(h) - (f \circ x)(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(p + hv) - f(p)}{h}.$$

Questo limite, qualora esista finito, viene detto *derivata della funzione* f *nel punto* p *secondo il vettore* v, e viene indicato con

$$\frac{\partial f}{\partial v}(p).$$

Possiamo allora esprimere quanto detto sopra nella forma seguente:

> Date una funzione
>
> $$f : A \to \mathbb{R}, \qquad A \subseteq \mathbb{R}^n, \; A \text{ } aperto,$$
>
> un punto p in A, e un vettore non nullo v in $\mathbb{R}^n$, se esistono le derivate parziali di f in un intorno di p, continue in p, allora la funzione f e' derivabile nel punto p secondo il vettore v, e si ha
>
> $$\frac{\partial f}{\partial v}(p) = \nabla f(p) \cdot v = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) v_i.$$

Un vettore di norma 1 si dice *versore*. Si osservi che le derivate secondo i versori della base canonica sono le derivate parziali:

$$\frac{\partial f}{\partial e_i}(p) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p),$$

per $i = 1, \ldots, n$.

3. **Esempio.**

Sia f la funzione definita da

$$f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}, \qquad (x, y) \in A,$$

dove A e' il piano $\mathbb{R}^2$ privato dell'origine.

La funzione f possiede derivate parziali continue in ogni punto del suo dominio:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) = -\frac{2x}{x^2 + y^2}$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) = -\frac{2y}{x^2 + y^2},$$

cioe'

$$\nabla f(x, y) = \left(-\frac{2x}{x^2 + y^2}, -\frac{2y}{x^2 + y^2}\right)$$

Dunque possiamo applicare i risultati dei punti precedenti.

Nel punto $p = (3, 4)$ il gradiente di f e' dato da

$$\nabla f(3,4) = \left(-\frac{6}{25}, -\frac{8}{25}\right).$$

Per ogni vettore $v = (v_1, v_2) \neq (0, 0)$, la derivata di f nel punto p secondo v e' data da

$$\frac{\partial f}{\partial v}(p) = \left(-\frac{6}{25}, -\frac{8}{25}\right) \cdot (v_1, v_2) = -\frac{6}{25}v_1 - \frac{8}{25}v_2.$$

4. Sia data una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ definita su un insieme aperto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e un punto p in A. Supponiamo che esistano le derivate parziali di f in un intorno di p, continue in p.

   Possiamo studiare l'andamento della derivata

   $$\frac{\partial f}{\partial v}(p) = \nabla f(p) \cdot v$$

   di f in p secondo v, quando v varia fra i versori in $\mathbb{R}^n$.

   Se $\nabla f(p) = 0$, allora

   $$\frac{\partial f}{\partial v}(p) = 0 \cdot v = 0$$

   per ogni v. Se $\nabla f(p) \neq 0$, allora

   $$\frac{\partial f}{\partial v}(p) = \|\nabla f(p)\| \, \|v\| cos(\vartheta) = \|\nabla f(p)\| \, cos(\vartheta),$$

   dove $0 \leq \vartheta \leq \pi$ e' l'angolo fra i vettori $\nabla f(p)$ e v. Dunque si ha

   $$-\|\nabla f(p)\| \leq \frac{\partial f}{\partial v}(p) \leq \|\nabla f(p)\|,$$

   e vale

   $$\frac{\partial f}{\partial v}(p) = \|\nabla f(p)\|$$

   se e solo se $\vartheta = 0$, cioe' v ha la stessa direzione e verso di $\nabla f(p)$.

   Dunque il gradiente di f in p, quando e' diverso dal vettore nullo, individua il versore secondo il quale la derivata di f in p e' massima, e in corrispondenza di tale versore si ottiene la norma del gradiente.

5. **Esempio.**

   Consideriamo ancora la funzione definita da

   $$f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}, \qquad (x, y) \in A,$$

   dove A e' il piano $\mathbb{R}^2$ privato dell'origine. Il grafico della funzione puo' essere visualizzato con "maxima". Le curve di livello di f sono circonferenze centrate nell'origine, il livello associato ad esse tende a $+\infty$ al tendere a 0 del raggio, mentre tende a 0 al tendere a $+\infty$ del raggio.

Intuitivamente, per ogni punto $p = (p_1, p_2)$ di A la direzione e il verso di mssima crescita della funzione in p sono quelli della semiretta uscente da p passante per l'origine.

Sappiamo che f possiede derivate parziali continue sul suo dominio, date da

$$\nabla f(x, y) = \left(-\frac{2x}{x^2 + y^2}, -\frac{2y}{x^2 + y^2} \right)$$

Nel punto $p = (3, 4)$ il gradiente di f e' dato da

$$\nabla f(3, 4) = \left(-\frac{6}{25}, -\frac{8}{25} \right);$$

la sua norma vale

$$\| \nabla f\,(p)\,\| = \frac{10}{25},$$

la sua direzione e il suo verso sono dati dal versore

$$v_0 = \frac{\nabla f(3, 4)}{\|\nabla f(3, 4)\|} = \frac{\left(-\frac{6}{25}, -\frac{8}{25}\right)}{\frac{10}{25}} = \left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5} \right).$$

Per il punto precedente, possiamo dire che il massimo valore delle derivate di f in p secondo versori di $\mathbb{R}^2$ si ottiene in corrispondenza di v_0, e

$$\frac{\partial f}{\partial v_0}(p) = \frac{10}{25}.$$

Si noti che il versore v_0 applicato in p "punta" verso l'origine.

Riferimenti.

SB, Cap. 4, par. 4.6, p.78-82.