Laboratorio di Matematica, A.A. 2009-2010; I modulo;

Lezioni IX-X

1. **Derivate successive.**

   - Sia data una funzione
   $$f : A \to \mathbb{R}$$
   definita su un aperto $A \subseteq \mathbb{R}^n$, e sia $x^* \in A$. Dato un indice $1 \leq i \leq n$, possiamo chiederci se esiste la derivata parziale rispetto a x_i di f in x^*,
   $$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*).$$
   - Se esiste la derivata parziale rispetto a x_i di f in ogni x di un intorno $B'(x^*)$ di x^*, allora e' data la funzione derivata parziale rispetto a x_i di f,
   $$\frac{\partial f}{\partial x_i} : B'(x^*) \to \mathbb{R}.$$
   Dato un indice $1 \leq j \leq n$, possiamo chiederci se esiste la derivata parziale rispetto a x_j di $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ in x^*,
   $$\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^*).$$
   Questa viene detta in breve *derivata parziale seconda rispetto a x_i e x_j di f in x^**, e viene indicata con
   $$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x^*).$$
   - Se esiste la derivata parziale seconda rispetto a x_i e x_j di f in ogni x di un intorno $B''(x^*)$ di x^*, allora e' data la funzione derivata parziale seconda rispetto a x_i e x_j di f,
   $$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} : B''(x^*) \to \mathbb{R}.$$
   Dato un indice $1 \leq h \leq n$, possiamo chiederci se esiste la derivata parziale rispetto a x_h di $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ in x^*,
   $$\frac{\partial}{\partial x_h}\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x^*).$$
   Questa viene detta in breve *derivata parziale terza rispetto a x_i, x_j e x_h di f in x^**, e viene indicata con
   $$\frac{\partial^3 f}{\partial x_h \partial x_j \partial x_i}(x^*).$$

- ...

In generale, data una sequenza di indici $1 \leq i_1, i_2, \ldots, i_k \leq n$, si definisce la *derivata parziale* $k-$*ma rispetto a* $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$ *di* f *in* x^*, che viene indicata con

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_1}}(x^*),$$

oppure con

$$D^k_{x_{i_k} \ldots x_{i_2} x_{i_1}} f(x^*).$$

Se la funzione f e' continua su A, si dice che f e' di classe $\mathcal{C}^0$ su A; se funzioni derivate parziali prime $D_{x_i} f$ sono definite e continue su A, si dice che f e' di classe $\mathcal{C}^1$ su A; se funzioni derivate parziali seconde $D^2_{x_j x_i} f$ sono definite e continue su A, si dice che f e' di classe $\mathcal{C}^2$ su A; ... se funzioni derivate parziali $k-$me $D^k_{x_{i_k} \ldots x_{i_2} x_{i_1}} f$ sono definite e continue su A, si dice che f e' di classe $\mathcal{C}^k$ su A.

2. **Esempio.**

Consideriamo la funzione

$$f(x, y) = \left(x^2 + y\right)^{\frac{1}{2}},$$

definita sui punti (x, y) tali che $x^2 + y > 0$, che costituiscono un insieme aperto A. Esistono le funzioni derivate parziali prime della funzione f su A, e sono date da

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(x^2 + y\right)^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}\left(x^2 + y\right)^{-\frac{1}{2}} 2x = \left(x^2 + y\right)^{-\frac{1}{2}} x$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\left(x^2 + y\right)^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}\left(x^2 + y\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Esistono le funzioni derivate parziali seconde della funzione f su A, e sono date da

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\left(x^2 + y\right)^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\left(x^2 + y\right)^{-\frac{1}{2}} x\right) = -\frac{1}{2}\left(x^2 + y\right)^{-\frac{3}{2}} 2x^2 + \left(x^2 + y\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(x^2 + y\right)^{-\frac{3}{2}} y$$
$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial x}\left(\left(x^2 + y\right)^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\left(x^2 + y\right)^{-\frac{1}{2}} x\right) = -\frac{1}{2}\left(x^2 + y\right)^{-\frac{3}{2}} x$$
$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\left(x^2 + y\right)^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}\left(x^2 + y\right)^{-\frac{1}{2}}\right) = -\frac{1}{4}\left(x^2 + y\right)^{-\frac{3}{2}} 2x = -\frac{1}{2}\left(x^2 + y\right)^{-\frac{3}{2}} x$$
$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\left(x^2 + y\right)^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2}\left(x^2 + y\right)^{-\frac{1}{2}}\right) = -\frac{1}{4}\left(x^2 + y\right)^{-\frac{3}{2}}$$

Queste funzioni sono tutte continue su A, cosi' f e' di classe $\mathcal{C}^2$ su A.

Si osservi che

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y), \qquad \textit{per ogni } (x, y) \in A.$$

3. **Teorema di Schwarz**

Nell'esempio precedente abbiamo osservato un'istanza di un fenomeno generale, precisato dal seguente

Teorema 1. (Schwarz) *Sia* $f : A \to \mathbb{R}$ *una funzione definita su un aperto* $A \subseteq \mathbb{R}^n$, *sia* $x^* \in A$, *e siano* i, j *due indici,* $1 \leq i, j \leq n$. *Se ciascuna delle funzioni derivate parziali seconde*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

e' definita in un intorno di x^*, *ed e' continua in* x^*, *allora*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x^*) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^*).$$

In particolare, se la funzione f e' di classe $\mathcal{C}^2$ su A, allora $D_{x_j x_i} f(x) = D_{x_i x_j} f(x)$ per ogni x in A.

Se le ipotesi del teorema non sono soddisfatte, potrebbe perfino succedere che una delle due derivate seconde esista in x^* e l'altra no. [1]

4. **Formula di Taylor.**

Sia data una funzione

$$f : A \to \mathbb{R}$$

definita su un aperto $A \subseteq \mathbb{R}^n$, e sia $x^* \in A$.

- Sia f di classe $\mathcal{C}^1$ in un intorno di x^*. Esistono le n derivate parziali prime $D_{x_i} f(x^*)$ di f in x^*, che costituiscono il gradiente $\nabla f(x^*)$ di f in x^* :

$$\nabla f(x^*) = \left(D_{x_1} f(x^*), \ldots, D_{x_n} f(x^*) \right).$$

[1]Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definta da

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & se \quad x = 0 \\ 0 & se \quad x \neq 0 \end{cases}.$$

Da una parte si ha che la derivata parziale rispetto ad y della funzione f esiste ed e' uguale a 0 in ogni punto di $\mathbb{R}^2$, e dunque anche la derivata parziale seconda rispetto ad y e a x della funzione f esiste ed e' uguale a 0 in ogni punto di $\mathbb{R}^2$, in particolare

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 0.$$

Dall'altra si ha che la derivata parziale rispetto ad x della funzione f non esiste in $(0, 0)$, dunque a maggior ragione non esiste la derivata parziale seconda

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0).$$

rispetto ad x e a y della funzione f in $(0, 0)$.

In un intorno di x^* possiamo approssimare la funzione f con una costante piu' una funzione lineare. Precisamente, si ha che

$$\begin{aligned} f(x^* + h) &= f(x^*) + \sum_{i=1}^{n} D_{x_i} f(x^*) h_i + R_1(x^*; h) \\ &= f(x^*) + \nabla f(x^*) \cdot h + R_1(x^*; h); \end{aligned}$$

l'errore $R_1(x^*; h)$ associato a questa approssimazione tende a zero piu' velocemente di $\|h\|$, quando l'incremento h tende al vettore nullo:

$$\lim_{h \to 0} \frac{R_1(x^*; h)}{\|h\|} = 0.$$

Questa approssimazione viene detta *formula di Taylor del primo ordine* per la funzione f nel punto x^*.

- Sia f di classe $\mathcal{C}^2$ in un intorno di x^*. Esistono le n^2 derivate parziali seconde $D^2_{x_j x_i} f(x^*)$ di f in x^*, che costituiscono la *matrice Hessiana* $D^2 f(x^*)$ di f in x^* :

$$D^2 f(x^*) = \begin{bmatrix} D^2_{x_1 x_1} f(x^*) & \dots & D^2_{x_1 x_n} f(x^*) \\ \vdots & & \vdots \\ D^2_{x_n x_1} f(x^*) & \dots & D^2_{x_n x_n} f(x^*) \end{bmatrix}.$$

Questa matrice risulta essere simmetrica, per l'ipotesi f di classe $\mathcal{C}^2$. In un intorno di x^* possiamo approssimare la funzione f con una costante piu' una funzione lineare piu' una forma quadratica. Precisamente, si ha che

$$\begin{aligned} f(x^* + h) &= f(x^*) + \sum_{i=1}^{n} D_{x_i} f(x^*) h_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} D^2_{x_i x_j} f(x^*) h_i h_j + R_2(x^*; h) \\ &= f(x^*) + \nabla f(x^*) \cdot h + \frac{1}{2} h^T D^2 f(x^*) h + R_2(x^*; h); \end{aligned}$$

l'errore $R_2(x^*; h)$ associato a questa approssimazione tende a zero piu' velocemente di $\|h\|^2$, quando l'incremento h tende al vettore nullo:

$$\lim_{h \to 0} \frac{R_2(x^*; h)}{\|h\|^2} = 0.$$

Questa approssimazione viene detta *formula di Taylor del secondo ordine* per la funzione f nel punto x^*.

- ...

Sia f di classe $\mathcal{C}^k$ in un intorno di x^*. Esistono le n^k derivate parziali $k-$me $D^k_{x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}} f(x^*)$ di f in x^*, con le quali possiamo costruire un polinomio omogeneo di grado k

$$D^k f(x^*)(h, h, \dots, h) = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k = 1}^{n} D^k_{x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}} f(x^*) h_{i_1} h_{i_2} \cdots h_{i_k}$$

In un intorno di x^* possiamo approssimare la funzione f con un polinomio di grado al piu' k. Precisamente, si ha che

$$\begin{aligned} f(x^*+h) &= f(x^*) + \sum_{i=1}^{n} D_{x_i} f(x^*) h_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} D^2_{x_i x_j} f(x^*) h_i h_j + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{k!} \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k=1}^{n} D^k_{x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k}} f(x^*) h_{i_1} h_{i_2} \cdots h_{i_k} + R_k(x^*; h), \end{aligned}$$

in breve

$$\begin{aligned} f(X^*+h) &= f(x^*) + Df(x^*)(h) + \frac{1}{2} D^2 f(x^*)(h,h) + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{k!} D^k f(x^*)(h, h, \ldots, h) + R_k(x^*; h); \end{aligned}$$

l'errore $R_k(x^*; h)$ associato a questa approssimazione tende a zero piu' velocemente di $\|h\|^k$, quando l'incremento h tende al vettore nullo:

$$\lim_{h \to 0} \frac{R_2(x^*; h)}{\|h\|^k} = 0.$$

Questa approssimazione viene detta *formula di Taylor del ordine* k per la funzione f nel punto x^*.

5. **Esempio**

Consideriamo di nuovo la funzione

$$f(x,y) = \left(x^2+y\right)^{\frac{1}{2}},$$

definita sui punti (x,y) tali che $x^2+y>0$, che costituiscono un insieme aperto A. Abbiamo visto che f e' di classe $\mathcal{C}^2$ su A; in ogni punto il gradiente e' dato da

$$\nabla f(x,y) = \left(\left(x^2+y\right)^{-\frac{1}{2}} x, \quad \frac{1}{2} \left(x^2+y\right)^{-\frac{1}{2}} \right),$$

e la matrice Hessiana e' data da

$$D^2 f(x,y) = \begin{bmatrix} \left(x^2+y\right)^{-\frac{3}{2}} y & -\frac{1}{2}\left(x^2+y\right)^{-\frac{3}{2}} x \\ -\frac{1}{2}\left(x^2+y\right)^{-\frac{3}{2}} x & -\frac{1}{4}\left(x^2+y\right)^{-\frac{3}{2}} \end{bmatrix}.$$

Nel punto $(x^*, y^*) = (2, -3)$ si ha

$$f(2,-3) = 1,$$

$$\nabla f(2,-3) = \left(2, \frac{1}{2}\right),$$

$$D^2 f(2,-3) = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

La formula di Taylor del secondo ordine di f nel punto $(2,-3)$ e'

$$\left((x+h)^2+y+k\right)^{\frac{1}{2}} = 1+2h+\frac{1}{2}k+\frac{1}{2}\left(-3h^3-2hk-\frac{1}{4}k^2\right)+R_2(2,-3;h,k),$$

con

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{R_2(2,-3;h,k)}{h^2+k^2} = 0.$$

6. **Formula di Taylor in una variabile**

Dato un polinomio in una variabile

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j x^j,$$

si ha

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}p(x) &= \frac{d}{dx}\sum_{j=0}^{n} c_j x^j = \sum_{j=0}^{n} c_j \frac{d}{dx}\left(x^j\right) = \sum_{j=0}^{n} c_j j x^{j-1} \\
\frac{d^2}{dx^2}p(x) &= \frac{d}{dx}\sum_{j=0}^{n} c_j j x^{j-1} = \sum_{j=0}^{n} c_j j \frac{d}{dx}\left(x^{j-1}\right) = \sum_{j=0}^{n} c_j j(j-1) x^{j-2} \\
&\vdots \\
\frac{d^i}{dx^i}p(x) &= \sum_{j=0}^{n} c_j j(j-1)\cdots(j-i+1)x^{j-i} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Dunque in $x=0$ si ha

$$\frac{d^i}{dx^i}p(0) = c_i i(i-1)\cdots 1 = c_i i!.$$

Possiamo allora leggere direttamente su un polinomio i valori di tutte le sue derivate in $x=0$.

Sia ora $f: I \to \mathbb{R}$ una funzione definita su un intervallo aperto $I \subseteq \mathbb{R}$ contenente 0, tale che esistano tutte le derivate $f'(0), f''(0), \ldots, f^{(k)}(0)$. L'unico polinomio

$$p(x) = \sum_{j=0}^{k} c_j x^j$$

tale che $p(0)=f(0),\ p'(0)=f'(0),\ p''(0)=f''(0),\ \ldots, p^{(k)}(0)=f^{(k)}(0)$ e' il $k-$mo polinomio di Taylor di f in $x=0$:

$$p(x) = f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f'(0)x^2+\cdots+\frac{1}{k!}f^{(k)}(0)x^k.$$

Un analogo significato hanno i polinomi di Taylor per le funzioni di piu' variabili.

La formula di Taylor di ordine n in $x = 0$ per il polinomio $(1+x)^n$ e' data da

$$(1+x)^n = \sum_{i=0}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{i!} x^i.$$

Questo e' il teorema binomiale nella sua forma piu' elementare.

La sua formula di Taylor di ordine k in $x = 0$ per la funzione esponenziale e' data da

$$e^x = \sum_{i=0}^{k} \frac{x^i}{i!} + R_k(x),$$

con

$$\lim_{x \to 0} \frac{R_k(x)}{x^k} = 0.$$

Riferimenti.

SB, Cap. 4, par. 4.8 p.87-95.