Laboratorio di Matematica, A.A. 2009-2010; I modulo;

Lezione XI.

1. Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione definita su un insieme $A \subset \mathbb{R}^n$, e sia $x^* \in A$. Se

   $f(x^*) \leq f(x), \qquad \forall x \in A$

   si dice che x^* e' un *punto di minimo assoluto* per f; se esiste un intorno sferico $B_\delta(x^*)$ di x^* tale che

   $f(x^*) \leq f(x), \qquad \forall x \in A \frown B_\delta(x^*)$

   si dice che x^* e' un *punto di minimo relativo* per f. Se le disuguaglianze sono strette, si dice che x^* e' un punto di minimo assoluto o relativo *forte* per f.

   In modo simile si introducono i termini "punto di massimo assoluto", "punto di massimo relativo", con le loro varianti forti.

   Se per ogni intorno $B_\delta(x^*)$ di x^* esistono due punti $x_1, x_2 \in B_\delta(x^*)$ tali che

   $f(x_1) < f(x^*) < f(x_2),$

   allora si dice che x^* e' un *punto di sella* per f.

2. La ricerca dei punti di minimo/massimo relativo per una funzione reale di una variabile reale si puo' effettuare, in parte, usando i seguenti risultati.

   Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione definita su un intervallo aperto $I \subseteq \mathbb{R}$, e sia $x^* \in I$;

   - supposto che f sia derivabile su I, si ha: se x^* e' un punto di minimo/massimo relativo per f, allora
     $f'(x^*) = 0;$
   - supposto che f sia derivabile due volte su I, si ha: se x^* e' un punto di minimo relativo per f, allora
     $f''(x^*) \geq 0;$
     se x^* e' un punto di massimo relativo per f, allora
     $f''(x^*) \leq 0;$
   - supposto che f sia derivabile due volte su I, si ha: se $f'(x^*) = 0$ e
     $f''(x^*) > 0,$
     allora x^* e' un punto di minimo relativo forte per f; se $f'(x^*) = 0$ e
     $f''(x^*) < 0,$
     allora x^* e' un punto di massimo relativo forte per f.

3. Questi risultati si estendono in modo naturale al caso di funzioni reali di piu' variabili reali. [1]

[1] In realta', il metodo piu' usato negli esercizi didattici sulla ricerca degli estremi relativi di funzioni di una variabile coinvolge solo la derivata prima della funzione, della quale si studia il segno in ogni punto del dominio. Anche questo metodo si estende al caso di funzioni di piu' variabili, ma in un modo meno elementare. Il metodo e' detto "metodo del gradiente" (cfr. ad es. la voce "Gradient descent" su Wikipedia).

Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione definita su un insieme aperto $A \subseteq \mathbb{R}^n$, e sia $x^* \in A$;

- supposto che f sia di classe $\mathcal{C}^1$ su A, si ha: se x^* e' un punto di minimo/massimo relativo per f, allora
  $\nabla f(x^*) = 0$;
- supposto che f sia di classe $\mathcal{C}^2$ su A, si ha: se x^* e' un punto di minimo relativo per f, allora
  $h^T D^2 f(x^*) h \geq 0, \qquad \forall h \in \mathbb{R}^n$;
  se x^* e' un punto di massimo relativo per f, allora
  $h^T D^2 f(x^*) h \leq 0, \qquad \forall h \in \mathbb{R}^n$;
- supposto che f sia di classe $\mathcal{C}^2$ su A, si ha: se $\nabla f(x^*) = 0$ e
  $h^T D^2 f(x^*) h > 0, \qquad \forall 0 \neq h \in \mathbb{R}^n$
  allora x^* e' un punto di minimo relativo forte per f; se $\nabla f(x^*) = 0$ e
  $h^T D^2 f(x^*) h < 0, \qquad \forall 0 \neq h \in \mathbb{R}^n$
  allora x^* e' un punto di massimo relativo forte per f.

4. Consideriamo una forma quadratica nella variabili $h_1, \ldots, h_n$,

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} h_i h_j = \begin{bmatrix} h_1 & \ldots & h_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} = h^T A h,$$

dove $h = (h_i)_{i=1}^n$, e $A = [a_{ij}]_{i=1}^n$ e' una matrice reale simmetrica.

- Se la forma quadratica assume sempre valori maggiori di zero, tranne che nel vettore nullo, cioe'
  $h^T A h > 0, \qquad \forall 0 \neq h \in \mathbb{R}^n$,
  allora diciamo che la matrice A e' *definita positiva*;
- se la forma quadratica assume sempre valori maggiori o uguali a zero, cioe'
  $h^T A h \geq 0, \qquad \forall h \in \mathbb{R}^n$,
  allora diciamo che la matrice A e' *semidefinita positiva*;
- se la forma quadratica assume sempre valori mimori o uguali a zero, cioe'
  $h^T A h \leq 0, \qquad \forall h \in \mathbb{R}^n$,
  allora diciamo che la matrice A e' *semidefinita negativa*;
- se la forma quadratica assume sempre valori minori di zero, tranne che nel vettore nullo, cioe'
  $h^T A h < 0, \qquad \forall 0 \neq h \in \mathbb{R}^n$,
  allora diciamo che la matrice A e' *definita negativa*;
- se la forma quadratica assume almeno un valore maggiore di zero e un valore minore di zero, cioe'
  $\exists h, k \in \mathbb{R}^n : \qquad h^T A h > 0, \ k^T A k < 0$,
  allora diciamo che la matrice A e' *indefinita*.

5. I principali risultati per la determinazione dei punti di massimo/minimo relativo per funzioni di piu' variabili sono solitamenmte espressi nella forma seguente.

   Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione definita su un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$, e sia x^* un punto interno ad A;

   - supposto che f sia di classe $\mathcal{C}^1$ su A, si ha: se x^* e' un punto di minimo/massimo relativo per f, allora
     $\nabla f(x^*) = 0$;
   - supposto che f sia di classe $\mathcal{C}^2$ su A, si ha: se x^* e' un punto di minimo relativo per f, allora
     $D^2 f(x^*)$ *e' semidefinita positiva*;
     se x^* e' un punto di massimo relativo per f, allora
     $D^2 f(x^*)$ *e' semidefinita negativa*;
   - supposto che f sia di classe $\mathcal{C}^2$ su A, si ha: se $\nabla f(x^*) = 0$ e
     $D^2 f(x^*)$ *e' definita positiva*;
     allora x^* e' un punto di minimo relativo forte per f; se $\nabla f(x^*) = 0$ e
     $D^2 f(x^*)$ *e' definita negativa*;
     allora x^* e' un punto di massimo relativo forte per f.

   Con l'espressione "x^* interno ad A" si intende che "x^* possiede un intorno sferico aperto $B_\delta(x^*)$ contenuto in A."

6. Nel caso di una forma quadratica di n variabili

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \cdots + a_n x_n^2 = \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

   associata a una matrice diagonale $A = \begin{bmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{bmatrix}$, si verifica facilmente che

   - A e' definita positiva se e solo se $a_i > 0$, $\forall 1 \leq i \leq n$;
   - A e' semidefinita positiva se e solo se $a_i \geq 0$, $\forall 1 \leq i \leq n$;
   - A e' semidefinita negativa se e solo se $a_i \leq 0$, $\forall 1 \leq i \leq n$;
   - A e' definita negativa se e solo se $a_i < 0$, $\forall 1 \leq i \leq n$;
   - A e' indefinita se e solo se $\exists 1 \leq i_1, i_2 \leq n$ tali che a_{i_1} e a_{i_2} hanno segni opposti.

7. Consideriamo il caso di forme quadratiche di due variabili x, y,

$$ax^2 + 2bxy + dy^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

associate a una generica matrice simmetrica $A = \left[\begin{array}{cc} a & b \\ b & d \end{array} \right]$.

Nel seguito, indichiamo con

$|A| = \left| \begin{array}{cc} a & b \\ b & d \end{array} \right| = ad - b^2$

il determinante di A.

Si prova che

- A e' definita positiva se e solo se
  $a > 0 \quad e \quad |A| = ad - b^2 > 0;$
- A e' semidefinita positiva se e solo se
  $a \geq 0 \quad e \quad d \geq 0 \quad |A| = ad - b^2 \geq 0;$
- A e' semidefinita negativa se e solo se
  $a \leq 0 \quad e \quad d \leq 0 \quad |A| = ad - b^2 \geq 0;$
- A e' definita negativa se e solo se
  $a < 0 \quad e \quad |A| = ad - b^2 > 0;$
- A e' indefinita se e solo se
  $|A| = ad - b^2 < 0.$

Ogni matrice simmetrica 2×2 e' identificata da tre numeri reali, cioe' da un punto di $\mathbb{R}^3$. Possiamo definire la distanza fra due matrici come la distanza fra i punti corrispondenti. Dai risultati stabiliti sulle funzini continue segue che nell'insieme delle matrici 2×2, ciascuno degli insiemi delle matrici definite positive, definite negative, indefinite e' un aperto, e ciascuno degli insiemi delle matrici semidefinite positive, semidefinite negative e' un chiuso.

I criteri sopra esposti si possono estendere, in un modo non ovvio, alle matrici simmetriche di ordine qualsiasi.

8. **Teorema di Weierstrass**

Il teorema di Weierstrass da' una condizione sufficiente affinche' una funzione abbia almeno un punto di minimo assoluto e uno di massimo assoluto su un insieme.

Sia dato un insieme $C \subset \mathbb{R}^n$. Ricordiamo che C si dice chiuso se ciascuna successione di punti di C convergente ha punto limite in C. Diciamo che C e' *limitato* se C e' contenuto in una sfera di $\mathbb{R}^n$, cioe' se esistono un $v \in \mathbb{R}^n$ e un $\rho > 0$ tali che $C \subseteq B_\rho(v)$.

Teorema 1. (di Weierstrass). *Sia $f : C \to \mathbb{R}$ una funzione continua definita su uun insieme $C \subset \mathbb{R}^n$ chiuso e limitato. Allora esistono almeno un punto x_1 di minimo assoluto e almeno un punto x_2 di massimo assoluto per f su C, cioe' tali che*

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2), \qquad \forall x \in C.$$

Se si toglie una delle tre ipotesi, l'enunciato del teorema diviene falso, come mostrato dai seguenti esempi.

La funzione $[0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definita da $x \mapsto e^{-x}$, e' continua, definita su un insieme chiuso, ma non possiede alcun punto di minimo.

La funzione $[-1, +1[\to \mathbb{R}$ definita da $x \mapsto x$, e' continua, definita su un insieme limitato, ma non possiede ne' punti di minimo ne' punti di massimo.

La funzione $]-1, 1[\to \mathbb{R}$ definita da

$$x \mapsto \begin{cases} 1 - x & per \quad x \leq 0 \\ -1 + x & per \quad x > 0 \end{cases} .$$

e'definta su un insieme chiuso e limitato, ma non possiede alcun punto di minimo.

9. **Esercizi**

Si determinino gli eventuali punti di minimo e massimo relativo delle funzioni seguenti

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 + x^2 - 6xy + 3y^2 \\ g(x) &= (x^3 - 3x + 4)(y^2 + 1) \\ h(x) &= \cos x + \cos y \\ k(x) &= \cos x, \end{aligned}$$

tutte definite su $\mathbb{R}^2$.

Si determino i punti di minimo e massimo assoluto per la funzione $f : C \to \mathbb{R}$, **definita da** $f(x, y) = xy$, **dove** $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Riferimenti.

per i punti 1,2,3,5: SB, Cap. 7, par. 7.1, 7.2, 7.3, p.159-165. I teoremi qui riportati sono meno dettagliati dei teoremi sul libro; sono comunque piu' che sufficienti per affrontare una buona parte di problemi.

per i punti 4,6,7: SB, Cap. 6, par. 6.1, 6.2, 7.3, p.139-144 e 147-149.

per il punto 8: SB, Cap. 3, par. 3.4, p. 55-56 - solo enunciato, ed esempio.