Laboratorio di Matematica, A.A. 2009-2010; I modulo;

Lezione XII.

Nella lezione precedente si sono presentati i seguenti risultati.

> Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione definita su un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$, e sia x^* un punto interno ad A;
>
> - supposto che f sia di classe $\mathcal{C}^1$ su A, si ha: se x^* e' un punto di minimo/massimo relativo per f, allora $\nabla f(x^*) = 0$;
> - supposto che f sia di classe $\mathcal{C}^2$ su A, si ha: se x^* e' un punto di minimo relativo per f, allora $D^2 f(x^*)$ e' semidefinita positiva; se x^* e' un punto di massimo relativo per f, allora $D^2 f(x^*)$ e' semidefinita negativa;
> - supposto che f sia di classe $\mathcal{C}^2$ su A, si ha: se $\nabla f(x^*) = 0$ e $D^2 f(x^*)$ e' definita positiva, allora x^* e' un punto di minimo relativo forte per f; se $\nabla f(x^*) = 0$ e $D^2 f(x^*)$ e' definita negativa, allora x^* e' un punto di massimo relativo forte per f.

Il primo criterio da' una condizione sulle derivate parziali prime di f necessaria affinche' il punto x^* sia di minimo/massimo relativo per f. Nel seguito ci riferiremo a questo primo criterio come "condizione necessaria del I ordine", al secondo criterio come "condizione necessaria del II ordine", e al terzo criterio come "condizione sufficiente del II ordine".

Inoltre, si e' presentato il Teorema di Weierstrass:

> Sia $f : C \to \mathbb{R}$ una funzione continua definita su uun insieme $C \subset \mathbb{R}^n$ chiuso e limitato. Allora f possiede punti di minimo assoluto e punti di massimo assoluto in C.

In questa lezione, vedremo come questi risultati possano essere usati per svolgere i seguenti esercizi.

- Si determinino gli eventuali punti di minimo e massimo relativo delle funzioni seguenti, tutte definite su $\mathbb{R}^2$.

$$f(x) = x^4 + x^2 - 6xy + 3y^2$$
$$g(x) = (x^3 - 3x + 4)(y^2 + 1)$$

- E' data la funzione

$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad h(x) = \cos(x) + \cos y.$$

  Per ciascuno dei seguenti punti

$$(0,0),\ (0,\pi),\ (\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}),\ (\pi,0),\ (\pi,\pi),$$

  si determini se e' un punto di minimo/massimo relativo per h.

- E' data la funzione
$$k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad k(x) = \cos(x).$$
Per ciascuno dei seguenti punti
$$(0,1),\ (\pi,-1),$$
si determini se e' un punto di minimo/massimo relativo per k.

- Si determino i punti di minimo e massimo assoluto per la funzione $f : C \to \mathbb{R}$, definita da $f(x,y) = xy$, dove $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \leq 1\}$.

1. Consideriamo la funzione
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) = x^4 + x^2 - 6xy + 3y^2.$$
Questa e' una funzione polinomiale, dunque di classe $\mathcal{C}^k$ su $\mathbb{R}^2$ per ogni $k = 1, 2, \ldots$; inoltre, ogni punto del dominio e' interno al dominio. Possiamo dunque applicare in ogni punto tutti e tre i criteri.

   - Le derivate parziali prime di f sono date da
$$\begin{aligned} D_x f(x,y) &= 4x^3 + 2x - 6y \\ D_y f(x,y) &= -6x + 6y \end{aligned}$$
Per la condizione necessaria del I ordine, gli eventuali punti di minimo/massimo relativo per f vanno ricercati fra le soluzioni del sistema
$$\begin{aligned} D_x f(x,y) &= 4x^3 + 2x - 6y = 0 \\ D_y f(x,y) &= -6x + 6y = 0 \end{aligned}$$
Questo sistema si puo' risolvere come segue:
$$\begin{array}{cc} 4y^3 - 4y = 0 & \quad y(y^2-1) = 0 \\ x = y & \end{array}$$
ottenendo cosi' i tre punti
$$(0,0), \quad (1,1), \quad (-1,-1).$$

   - Le derivate parziali seconde di f sono date da
$$\begin{aligned} D^2_{xx} f(x,y) &= 12x^2 + 2 \\ D^2_{xy} f(x,y) &= -6 \\ D^2_{yx} f(x,y) &= -6 \\ D^2_{yy} f(x,y) &= 6 \end{aligned}$$
$$D^2 f(x,y) = \begin{bmatrix} 12x^2 + 2 & -6 \\ -6 & 6 \end{bmatrix}.$$

– Nel punto $(0,0)$ abbiamo

$$D^2 f(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -6 & 6 \end{bmatrix}.$$

Ci chiediamo quale sia il "segno" della matrice. Si ha

$$\left| D^2 f(0,0) \right| = 12 - 36 = -24 < 0,$$

dunque la matrice non e' ne' semidefinita positiva, ne' semidefinita negativa; e' indefinita. Per la condizione necessaria del II ordine, possiamo concludere che $(0,0)$ non e' ne' un punto di minimo ne' un punto di massimo relativo per f; e' un punto di sella.

– Nel punto $(1,1)$ abbiamo

$$D^2 f(1,1) = \begin{bmatrix} 14 & -6 \\ -6 & 6 \end{bmatrix}$$

Ci chiediamo quale sia il "segno" della matrice. Si ha

$$\begin{array}{l} \left| D^2 f(1,1) \right| = 84 - 36 = 48 > 0 \\ D^2_{xx} f(1,1) = 14 > 0 \end{array}$$

dunque la matrice e' definita positiva. Per la condizione sufficiente del II ordine, possiamo concludere che $(1,1)$ e' un punto di minimo relativo forte per f.

– Nel punto $(-1,-1)$ abbiamo

$$D^2 f(-1,-1) = \begin{bmatrix} 14 & -6 \\ -6 & 6 \end{bmatrix}$$

Si ha $D^2 f(-1,-1) = D^2 f(1,1)$, dunque argomentando come sopra si giunge a concludere che $(-1,-1)$ e' un punto di minimo relativo forte per f.

Il fatto che i punti $(1,1)$ e $(-1,-1)$ abbiano la stessa classificazione puo' essere visto come una conseguenza del fatto che la funzione f possiede la seguente proprieta' di simmetria:

$$f(-x,-y) = f(x,y), \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

2. Consideriamo la funzione

$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad h(x) = \cos(x) + \cos y,$$

e i punti

$$(0,0),\ (0,\pi),\ (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}),\ (\pi,0),\ (\pi,\pi).$$

Le derivate parziali prime di h sono date da

$$\nabla h(x,y) = \begin{bmatrix} D_x h(x,y) & D_y h(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin(x) & -\sin(y) \end{bmatrix},$$

e le derivate parziali seconde di h sono date da

$$D^2h(x,y) = \begin{bmatrix} D^2_{xx}h(x,y) & D^2_{xy}h(x,y) \\ D^2_{yx}h(x,y) & D^2_{yy}h(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos(x) & 0 \\ 0 & -\cos(y) \end{bmatrix}.$$

La funzione h e' di classe $\mathcal{C}^2$ su $\mathbb{R}^2$ (in realta' di classe $\mathcal{C}^k$ per ogni $k = 1, 2, \ldots$), ogni punto del dominio e' interno al dominio, dunque possiamo applicare in ogni punto tutti e tre i criteri.

- Nel punto $(0,0)$ abbiamo

  $$\nabla h(0,0) = \begin{bmatrix} -\sin(0) & -\sin(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix},$$

  e

  $$D^2h(0,0) = \begin{bmatrix} -\cos(0) & 0 \\ 0 & -\cos(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

  una matrice definita negativa. Per la condizione sufficiente del II ordine, si ha che $(0,0)$ e' un punto di massimo relativo forte per h.
- Nel punto $(0,\pi)$ abbiamo

  $$\nabla h(0,\pi) = \begin{bmatrix} -\sin(0) & -\sin(\pi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix},$$

  e

  $$D^2h(0,\pi) = \begin{bmatrix} -\cos(0) & 0 \\ 0 & -\cos(\pi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

  una matrice indefinita. Per la condizione necessaria del II ordine, il punto $(0,\pi)$ non e' ne' di minimo ne' di massimo relativo per h, e' di sella.
- Nel punto $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ abbiamo

  $$\nabla h(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = \begin{bmatrix} -\sin\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

  Per la condizione necessaria del I ordine, che il punto $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ non e' ne' di minimo ne' di massimo relativo per h.
- Nel punto $(\pi, 0)$ abbiamo

  $$\nabla h(\pi,0) = \begin{bmatrix} -\sin(\pi) & -\sin(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix},$$

  e

  $$D^2h(\pi,0) = \begin{bmatrix} -\cos(\pi) & 0 \\ 0 & -\cos(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

  una matrice indefinita. Per la condizione necessaria del II ordine, il punto $(\pi,0)$ non e' ne' di minimo ne' di massimo relativo per h, e' di sella.
- Nel punto (π,π) abbiamo

  $$\nabla h(\pi,\pi) = \begin{bmatrix} -\sin(\pi) & -\sin(\pi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix},$$

  e

  $$D^2h(0,0) = \begin{bmatrix} -\cos(\pi) & 0 \\ 0 & -\cos(\pi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

  una matrice definita positiva. Per la condizione sufficiente del II ordine, si ha che $(0,0)$ e' un punto di minimo relativo forte per h.

Osserviamo che

$$\cos(0) + \cos(0) = 2 \geq \cos(x) + \cos(y) \geq -2 = \cos(\pi) + \cos(\pi), \qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

dunque

$$h(0, 0) \geq h(x, y) \geq h(\pi, \pi), \qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

cosi' $(0, 0)$ e' un punto di massimo assoluto per h, e (π, π) e' un punto di minimo assoluto per h.

3. Consideriamo la funzione

$$k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad k(x) = \cos(x),$$

e i punti

$$(0, 1),\ (\pi, -1).$$

Le derivate parziali prime di k sono date da

$$\nabla k(x, y) = \left[\begin{array}{cc} D_x k(x, y) & D_y k(x, y) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} -\sin(x) & -0 \end{array}\right],$$

e le derivate parziali seconde di k sono date da

$$D^2 k(x, y) = \left[\begin{array}{cc} D^2_{xx} k(x, y) & D^2_{xy} k(x, y) \\ D^2_{yx} k(x, y) & D^2_{yy} k(x, y) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{rr} -\cos(x) & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right].$$

La funzione k e' di classe $\mathcal{C}^2$ su $\mathbb{R}^2$ (in realta' di classe $\mathcal{C}^k$ per ogni $k = 1, 2, \ldots$), ogni punto del dominio e' interno al dominio, dunque possiamo applicare in ogni punto tutti e tre i criteri.

- Nel punto $(0, 1)$ abbiamo

$$\nabla k(0, 1) = \left[\begin{array}{cc} -\sin(0) & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \end{array}\right],$$

e

$$D^2 h(0, 1) = \left[\begin{array}{rr} -\cos(0) & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{rr} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right],$$

una matrice semidefinita negativa, ma non definita negativa. La condizione necessaria del primo ordine per i punti di minimo/massimo relativo e' soddisfatta, la condizione necessaria del II ordine per i punti di massimo relativo e' soddisfatta, la condizione sufficiente del II ordine per i punti di massimo relativo non e' soddisfatta. Dunque il punto $(0, 1)$ puo' essere di massimo relativo per k, ma non possiamo garantirlo.

- Nel punto $(\pi, -1)$ abbiamo

$$\nabla k(\pi, -1) = \left[\begin{array}{cc} -\sin(\pi) & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \end{array}\right],$$

e

$$D^2 h(\pi, -1) = \left[\begin{array}{rr} -\cos(\pi) & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{rr} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right],$$

una matrice semidefinita positiva, ma non definita positiva. La condizione necessaria del primo ordine per i punti di minimo/massimo relativo e' soddisfatta, la condizione necessaria del II ordine per i punti di minimo relativo e' soddisfatta, la condizione suffiviente del II ordine per i punti di minimo relativo non e' soddisfatta. Dunque il punto $(\pi, -1)$ puo' essere di minimo relativo per k, ma non possiamo garantirlo.

Osserviamo che

$$1 = h(0,1) \geq h(x,y) \geq h(\pi,-1) = -1, \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

cosi' $(0,1)$ e' un punto di massimo assoluto per h, e $(\pi, -1)$ e' un punto di minimo assoluto per h.

4. Data la funzione $f : C \to \mathbb{R}$, definita da

$$f(x,y) = xy,$$

sul dominio $C = \{(x,y) : \; x^2 + y^2 \leq 1\}$, ci proponiamo di determinarne gli eventuali punti di massimo/minimo assoluto su C.

Questa e' una funzione polinomiale, dunque di classe $\mathcal{C}^k$ su $\mathbb{R}^2$ per ogni $k = 1, 2, \ldots$; il dominio C e' chiuso e limitato. Per Teorema di Weierstrass, la funzione f possiede punti di minimo assoluto e di massimo assoluto su C.

- Cerchiamo prima i punti (x,y) di minimo/massimo assoluto interni a C, cioe' tali che $x^2 + y^2 < 1$. Il gradiente di f e'

$$\nabla f(x,y) = \left[\begin{array}{cc} y & x \end{array} \right].$$

Per la condizione necessaria del primo ordine, l'unico puto interno a C che puo' essere di minimo/massimo assoluto e' $(x,y) = (0,0)$.
La matrice Hessiana di f e'

$$D^2 f(x,y) = \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right].$$

Osserviamo che

$$\| D^2 f(0,0) \| = -1;$$

dunque $D^2 f(0,0)$ e' indefinita. Per la condizione necessaria del II ordine, il punto $(0,0)$ non e' ne' di minimo ne' di massimo relativo. A maggior ragione il punto $(0,0)$ non e' ne' di minimo ne' di massimo assoluto.
Dunque i punti (x,y) di minimo/massimo assoluto per f sono tutti sul "bordo" del dominio C, cioe' stanno sulla circonferenza di equazione

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Ora, questa circonferenza puo' essere vista come l'immagine della funzione

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \qquad \varphi(t) = (\cos(t), \sin(t)).$$

Consideriamo la funzione composta

$$f \circ \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \qquad (f \circ \varphi)(t) = f(\varphi)(t)) = \cos(t)\sin(t).$$

Per la condizione necessaria del I ordine, i punti t di minimo/massimo relativo per $f \circ \varphi$ sono soluzioni dell'equazione

$$(f \circ \varphi)'(t) = -\sin^2(t) + \cos^2(t) = 0,$$

cioe'

$$\cos(t) = \pm \sin(t).$$

Le soluzioni di questa equazione sono i punti del tipo

$$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}p, \qquad p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots.$$

A questi punti corrispondono sul bordo di C i punti

$$a = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad b = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad c = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad d = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Il problema della determinazione dei punti di massimo/minimo relativo sul bordo di C puo' essere risolto anche col metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

Ora si ha

$$f(a) = f(c) = \frac{1}{2}, \quad f(b) = f(d) = -\frac{1}{2}.$$

Dunque i punti di minimo assoluto per f su C sono b, d, e i punti di massimo assoluto per f su C sono a, c.