Laboratorio di Matematica, A.A. 2009-2010; I modulo;

Lezione XIV.

1. **Segmenti in $\mathbb{R}^2$**

   Nel piano $\mathbb{R}^2$, siano dati due punti distinti $p_0 = (a_0, b_0)$ e $p_1 = (a_1, b_1)$. La retta passante per p_0 e p_1 puo' essere descritta come l'insieme dei punti $p_t = (a_t, b_t)$ dati da
   $$p_t = p_0 + t(p_1 - p_0),$$
   o, in altri termini,
   $$p_t = (1-t)p_0 + tp_1,$$
   ottenuti al variare di t in $\mathbb{R}$. In coordinate, si ha
   $$\begin{array}{l} a_t = a_0 + t(a_1 - a_0) \\ b_t = b_0 + t(b_1 - b_0) \end{array}$$
   o, in altri termini,
   $$\begin{array}{l} a_t = (1-t)a_0 + ta_1 \\ b_t = (1-t)b_0 + tb_1 \end{array},$$
   dove $t \in \mathbb{R}$. Si ha che

   > per $0 \leq t \leq 1$, i punti p_t descrivono il segmento di estremi p_0 e p_1.

   Un sottinsieme $U \subseteq \mathbb{R}^2$ si dice *insieme convesso* se ogni segmento avente estremi in U e' interamente contenuto in U.

   Esempi di insiemi convessi sono le rette, i segmenti, i triangoli, i poligoni regolari, i cerchi, gli angoli minori-uguali di un angolo piatto. Esempi di insiemi non convessi sono gli angoli maggiori di un angolo piatto.

2. **Funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convesse**

   Consideriamo le funzioni
   $$\begin{array}{ll} f(x) = x^2, & x \in \mathbb{R}; \\ g(x) = e^x, & x \in \mathbb{R}; \\ h(x) = \dfrac{1}{x}, & x \in \mathbb{R}^+. \end{array}$$
   Ciascuna di queste funzioni possiede tutte le seguenti proprieta'

   (a) $f''(x) \geq 0$, per ogni x nel dominio di f;

   (b) f' debolmente crescente sul dominio di f;

   (c) il grafico di f sta' al di sopra di ogni sua tangente;

   (d) tutti i segmenti con estremi sul grafico di f stanno sopra il grafico di f.

La (a) richiede che la funzione sia derivabile due volte nel suo dominio, le (b) e (c) richiedono che la funzione sia derivabile nel suo dominio, mentre la (d) ha senso per una qualsiasi funzione.

Ad esempio, la funzione valore assoluto

$$k(x) = |x|, \qquad x \in \mathbb{R}$$

possiede la proprieta' (d), ma non le altre (non essendo derivabile in $x = 0$.)

La proprieta' (d) si puo' anche esprimere nella forma

(d') l'insieme dei punti che stanno sopra il grafico di f e' convesso.

Definizione 1. *Una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ che possiede la proprieta' (d), o (d'), si dice funzione convessa.*

3. Per una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^1$ su un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$, la proprieta' (c) puo' essere espressa anche nella forma

   (c') per ogni punto $x_0 \in I$, la funzione f e' maggiore-uguale della sua approssimazione del primo ordine nel punto x_0, cioe'

   $$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

   o, in altra forma

   $$f(x) - f(x_0) \geq f'(x_0)(x - x_0),$$

   per ogni $x \in I$.

4. Per una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ definita su un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$, esprimiamo ora in altra forma la proprieta' (d). Siano x_0 e x_1 due punti di I, e siano $(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, f(x_1))$ i corrispondenti punti sul grafico di f.

   Il segmento avente estremi $(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, f(x_1))$ puo' essere descritto come l'insieme dei punti dati da

   $$(1 - t)(x_0, f(x_0)) + t(x_1, f(x_1)),$$

   cioe'

   $$((1 - t)x_0 + tx_1, (1 - t)f(x_0) + tf(x_1))$$

   ottenuti al variare di $0 \leq t \leq 1$.

   L'arco di grafico della funzione f avente estremi $(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, f(x_1))$ puo' essere descritto come l'insieme dei punti dati da

   $$((1 - t)x_0 + tx_1, f((1 - t)x_0 + tx_1))$$

   ottenuti al variare di $0 \leq t \leq 1$.

   Dunque la condizione che i punti del segmento stiano sopra i punti del grafico si scrive

   $$f((1 - t)x_0 + tx_1) \leq (1 - t)f(x_0) + tf(x_1), \qquad 0 \leq t \leq 1.$$

5. Si puo' provare il seguente

   Teorema 1. *Per una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^2$ su un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$, le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

   (a) per ogni $x \in I$,
   $$f''(x) \geq 0;$$
   (b) per ogni $x_1 \leq x_2$ in I,
   $$f'(x_1) \leq f'(x_2);$$
   (c) per ogni $x_0, x \in I$,
   $$f(x) - f(x_0) \geq f'(x_0)(x - x_0).$$
   (d) per ogni $x_0, x_1 \in I$,
   $$f\left((1-t)x_0 + tx_1\right) \leq (1-t)f(x_0) + tf(x_1), \qquad 0 \leq t \leq 1.$$

6. **Segmenti e insiemi convessi in $\mathbb{R}^n$.**

   Nello spazio $\mathbb{R}^n$, siano dati due punti distinti p_0 e p_1. La retta passante per p_0 e p_1 puo' essere descritta come l'insieme dei punti p_t dati da
   $$p_t = p_0 + t(p_1 - p_0),$$
   o, in altri termini,
   $$p_t = (1-t)p_0 + tp_1,$$
   ottenuti al variare di t in $\mathbb{R}$.

   Per definizione, il segmento di estremi p_0 e p_1 e' l'insieme dei punti
   $$p_t = (1-t)p_0 + tp_1,$$
   ottenuti al variare di $0 \leq t \leq 1$.
   Un sottinsieme $U \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice *convesso* se ogni segmento avente estremi in U e' interamente contenuto in U.

7. **Funzioni $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ convesse**

   Definizione 2. *Sia $f : U \to \mathbb{R}$ una funzione definita su un sottinsieme convesso $U \subset \mathbb{R}^n$. Diciamo che f e' convessa su U se per ogni $x_0, x_1 \in U$, si ha*
   $$f\left((1-t)x_0 + tx_1\right) \leq (1-t)f(x_0) + tf(x_1), \qquad 0 \leq t \leq 1.$$

   Questa condizione si puo' dare anche nella forma

   L'insieme dei punti di $\mathbb{R}^{n+1}$
   $$\{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \; y \geq f(x)\}$$
   che stanno sopra il grafico di f e' convesso.

   Un esempio di funzione convessa di due variabili e' dato da
   $$f(x, y) = x^2 + y^2, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$