27.10.10; Derivate di funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$; derivate parziali di funzioni $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

riferimenti:

SB, vol. 2, Cap. 4: Par. 4.1; Par. 4.2, prodotti marginali;

- **Richiami sulle derivate di funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.**
  - Introduzione. Velocita' media e velocita' istantanea di un punto materiale che si muove lungo una retta.
  - Definizione. Siano $f : A \to \mathbb{R}$, con $A \subseteq \mathbb{R}$ aperto, e $x_0 \in A$; rapporto incrementale di f da x_0 a x :

    $$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0};$$

    derivata di f in x_0 :

    $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0),$$

    qualora il limite esista e sia finito. [1] Altra scrittura:

    $$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

    Altre notazioni:

    $$(Df)(x_0), \quad \frac{df}{dx}(x_0).$$
  - Esercizio svolto: verificare applicando la definizione che per la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ si ha $f'(x_0) = 2x_0$ per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$.
  - Teorema: ciascuna funzione elementare e' derivabile in tutti i punti del suo insieme di definizione; [2] le tabelle delle derivate, con le dovute precisazioni, si possono trovare in un qualsiasi testo di Matematica generale.
  - Esempi di funzioni non derivabili in un punto: $a(x) = |x|$, $r(x) = \sqrt{|x|}$, e

    $$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & per\ x \neq 0 \\ 0 & per\ x = 0 \end{cases}$$

    sono derivabili su tutto $\mathbb{R}$ tranne che in $x = 0$.

[1] Si tratta di limite di una funzione di una variabile reale per variabile che tende a un numero; questa concetto puo' essere ricondotto al concetto di limite di una successione.

[2] In realta' il caso delle funzioni potenza e' un po' delicato. Le funzioni potenza $f(x) = x^\alpha$, con α numero reale, sono tutte definite sull'intervallo aperto $]0, +\infty[$; ciascuna di queste funzioni e' derivabile in ogni punto di questo intervallo, e si ha $f'(x) = \alpha x^{\alpha - 1}$. In particolare, cio' vale per la funzione $f(x) = x^{1/3}$; questa funzione puo' essere definita anche su tutto $\mathbb{R}$, e non e' derivabile in 0.

– Proposizione. Siano $f, g: A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$ aperto, $x_0 \in A$; sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Se f e g sono derivabili in x_0, allora anche $f+g, \alpha f, fg$, e $\frac{f}{g}$ (se $g(x_0) \neq 0$), sono derivabili in x_0, e si ha [3]

$$\begin{aligned}
(f+g)'(x_0) &= f'(x_0) + g'(x_0),\\
(\alpha f)'(x_0) &= \alpha f'(x_0),\\
(fg)'(x_0) &= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0),\\
(\frac{f}{g})'(x_0) &= \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}.
\end{aligned}$$

– Proposizione. Siano: $f: A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$ aperto, $x_0 \in A$; $g: B \to \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}$ aperto, con $f(A) \subseteq B$. Se f e' derivabile in x_0 e g e' derivabile in $f(x_0)$, allora anche $g \circ f: A \to \mathbb{R}$ e' derivabile in x_0, e si ha

$$(g \circ f)'(x_0) = g'\left(f(x_0)\right) f'(x_0).$$

Esempio:

$$\frac{d}{dx} \log\left(1 + x + x^2\right) = \frac{1}{1 + x + x^2} \cdot (1 + 2x).$$

- **Derivate parziali di funzioni $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.**

– Introduzione. Produttivita' marginale del capitale e produttivita' marginale del lavoro, per una funzione di produzione $Q = F(K, L)$.

– Siano $f: A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0) \in A$; per ciascun $j = 1, \ldots, n$, derivata parziale di f rispetto alla variabile x_j nel punto x_0 :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_1^0, \ldots, x_j^0 + h, \ldots, x_n^0) - f(x_1^0, \ldots, x_j^0, \ldots, x_n^0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x^0),$$

quando il limite esiste ed e' finito. In breve, indicato con e_j il $j-$mo vettore della base canonica di $\mathbb{R}^n$, si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x^0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x^0 + he_j) - f(x^0)}{h}.$$

– Esercizi svolti: calcolare, nei punti in cui esistono, le derivate parziali delle funzioni

$$\begin{aligned}
f(x_1, x_2) &= x_1^2 x_2;\\
f(x_1, x_2) &= \log\left(1 + x_1 + x_1 x_2\right);\\
f(x_1, x_2) &= \frac{x_1 + x_2}{1 + x_2^2}\\
f(x_1, x_2) &= \|(x_1, x_2)\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.
\end{aligned}$$

Quest'ultima funzione possiede derivate parziali in ogni punto di $\mathbb{R}^2$, tranne che nell'origine $(0, 0)$.

[3] Se f e g sono derivabili su tutto A, possiamo scrivere $(f+g)' = f' + g'$, $(\alpha f)' = \alpha f'$, $(fg)' = f'g + fg'$, $(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

Esercizi.

1. Calcolare usando la definizione la derivata della funzione $f(x) = 1/x$ nel punto 1.
2. Verificare applicando la definizione che per la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$ con n intero naturale, si ha la funzione derivata $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f'(x) = nx^{n-1}$.
3. Verificare che le funzioni $a(x) = |x|$, $r(x) = \sqrt{|x|}$, e
$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & per\ x \neq 0 \\ 0 & per\ x = 0 \end{cases}$$
non sono derivabili in 0.
4. Calcolare le derivate parziali
$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= x_1(x_2 + e_1^x) \\ f(x_1, x_2) &= \sqrt{1 + x_2} \\ f(x_1, x_2) &= (e^{x_1} + x_2)^2, \\ f(x_1, x_2, x_3) &= x_1 x_2 x_3 \\ f(x_1, x_2, x_3) &= (x_1 + x_2)e^{-x_3} \\ f(x) &= \|x\|, \qquad x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$