29.10.10; Derivate di funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$; derivazione delle funzioni composte -derivazione lungo una curva; derivate direzionali di funzioni $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; massima derivata direzionale e gradiente.

riferimenti:

SB, vol. 2, Cap. 4: Par. 4.5; Par. 4.6;

App. Lez. VII: punto 5, 6, 7, 8

App. Lez. VIII

- **Derivate di funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$.**
  - Introduzione. Velocita' media e velocita' istantanea di un punto materiale che si muove nel piano.
  - Definizione. Siano $x : I \to \mathbb{R}^n$, con $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo aperto, e $t_0 \in A$; derivata di x in t_0 :

    $$\lim_{h \to 0} \frac{x(t_0 + h) - x(t_0)}{h} = x'(t_0),$$

    qualora il limite esista e sia finito.
  - Proposizione. Sia $x = (x_1, \ldots, x_n) : I \to \mathbb{R}^n$, con $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo aperto. La funzione x e' derivabile in $t_0 \in I$ se e solo se tutte le funzioni x_i sono derivabili in t_0, e in tal caso si ha

    $$x'(t_0) = (x_1'(t_0), \ldots, x_n'(t_0)).$$
  - Esercizio svolto. Sia $x = (x_1, x_2) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, definita da $x_1(t) = 1+2t$, $x_2(t) = 3+4t$. Determinare la derivata $x'(t_0)$ nel generico punto $t_0 \in \mathbb{R}$. Interpretata la $x(t)$ come la legge del moto di un punto materiale, riconoscere che tale moto e' un moto rettilineo uniforme. Osservato che $x(t) = (1 + 2t, 3 + 4t) = (1, 3) + t(2, 4)$, riconoscere che la traiettoria del punto e' la retta uscente dal punto $x^0 = (1, 3)$ parallela al vettore $v = (2, 4)$.
  - Esercizio svolto. Sia $x = (x_1, x_2) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, definita da $x_1(t) = cos(t)$, $x_2(t) = sen(t)$. Determinare il vettore derivata $x'(\pi/3)$, e verificare che questo vettore e' ortogonale al vettote posizione $x(\pi/3)$.

    Interpretata la $x(t)$ come la legge del moto di un punto materiale, si ha che tale moto e' un moto circolare uniforme.

- **Derivazione delle funzioni composte -derivazione lungo una curva.**
  - Notazione. Sia $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto. Se in un punto $x^0 \in A$ esistono tutte le derivate parziali di f, esse formano un vettore di $\mathbb{R}^n$, detto gradiente di f in x^0, e denotato con $\nabla f(x^0)$. In simboli:

    $$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^0) \right) = \nabla f(x^0).$$

- Teorema. Siano date le funzioni

$$x = (x_1, \ldots, x_n) : \ I \subseteq \mathbb{R} \ \to \ \mathbb{R}^n, \qquad f : \ A \subseteq \mathbb{R}^n \ \to \ \mathbb{R},$$

  I intervallo aperto, A aperto, e $x(I) \subseteq A$. Sia $t_0 \in I$, esista $x'(t_0)$ ed esistano $\frac{\partial f}{\partial x_j}(y)$ per ogni $j = 1, \ldots, n$ ed ogni y in un intorno di $x(t_0)$. Allora la funzione composta

$$f \circ x : \ I \subseteq \mathbb{R} \ \to \ \mathbb{R}$$

  e' derivabile in t_0 e

$$(f \circ x)'(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x(t_0))x_1'(t_0) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x(t_0))x_n'(t_0).$$

  In breve:

$$(f \circ x)'(t_0) = \nabla f(x(t_0)) \cdot x'(t_0).$$

- **Derivate direzionali di funzioni $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.**

  - Terminologia. Un vettore $v \in \mathbb{R}^n$ di norma 1 si dice versore, o direzione. Per ogni vettore non nullo w, il vettore $\frac{w}{\|}w\|$ e' un versore che ha la stessa direzione e verso di w.
  - Siano $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con A aperto, $x^0 \in A$, e $v \in \mathbb{R}^n$ versore. Derivata di f secondo la direzione v nel punto x_0 :

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x^0 + tv) - f(x^0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial v}(x^0),$$

    qualora il limite esista e sia finito. Le derivate parziali sono le derivate secondo i versori della base canonica.
  - Proposizione. Siano $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con A aperto, e $x^0 \in A$. Supposto che esistano $\frac{\partial f}{\partial x_j}(y)$ per ogni $j = 1, \ldots, n$ ed ogni y in un intorno di x^0, si ha che f e' derivabile secondo ogni direzione v e

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x^0) = \nabla f(x^0) \cdot v.$$

    Questa proposizione discende direttamente dal teorema sulla deivazione delle funzioni composte.
  - Esercizio svolto. Determinare la derivata della funzione

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2}$$

    nel punto $x^0 = (3, 1)$ secondo la direzione $v = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

- **Massima derivata direzionale e gradiente.**

  - Siano f, x^0 come nella proposizione precedente, e sia $\nabla f(x^0) \neq 0$. Dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz si ha in particolare che

$$\underset{\|v\| = 1}{\text{Max}} \ \frac{\partial f}{\partial v}(x^0) = \|\nabla f(x^0)\|,$$

    e il massimo si ottiene in corrispondenza di un solo versore, quello che ha la stessa direzione e verso di $\nabla f(x^0)$.

Esercizi.

1. E' data la funzione

$$x(t) = \left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2} \right) \qquad t \in \mathbb{R}.$$

   Si determini $x'(2)$.

2. Sono date le funzioni

$$x(t) = \left(\frac{1}{1-t}, \frac{1}{2+t} \right), \quad t \in]-2, 1[;$$

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}, \quad (0,0) \neq (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

   Si determini $(f \circ x)'(0)$.

3. E' data la funzione

$$f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{1}{x-2},$$

   e il punto $p = (1, 1)$. Si verifichi che f e p soddisfano le ipotesi della Proposizione sulle derivate direzionali. Si determini il versore cui corrisponde la derivata direzionale massima di f nel punto p.