Esercizi. Sottospazi; sistemi di generatori; vettori linearmente indipendenti; basi

1. Per ciascuno dei seguenti sottinsiemi di $\mathbb{R}^2$ si verifichi usando la definizione se e' o meno un sottospazio di $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} U &= \{(x,y):\ 2x+3y=0\} \\ V &= \{(x,y):\ 2x+3y=6\} \\ W &= \{(x,y):\ xy=0\} \end{aligned}$$

2. Per ciascuno dei seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$ si determini una base.

$$\begin{aligned} U &= \{(x,y,z):\ 2x+3y+4z=0\} \\ V &= \{(x,y,z):\ 2x+3y+4z=0,\ 2y+3z=0\} \end{aligned}$$

3. Per ciascuno dei seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$ si determini una base.

$$\begin{aligned} U &= \langle (\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{6},\tfrac{1}{8}), (\tfrac{1}{6},\tfrac{1}{9},\tfrac{1}{12}) \rangle \\ V &= \langle (1,1,0),(1,0,1) \rangle \\ W &= \langle (1,1,1),(3,1,0),(0,2,3) \rangle \end{aligned}$$

4. Per ciascuna delle seguenti sequenze di vettori di $\mathbb{R}^3$ si stabilisca se e' linearmente indipendente, se genera $\mathbb{R}^3$, se e' una base di $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} &u_1=(1,2,0),\ u_2=(3,4,5) \\ &v_1=(1,0,0),\ v_2=(2,3,0),\ v_3=(4,5,6) \\ &w_1=(1,2,3),\ w_2=(1,3,5),\ w_3=(1,4,7) \\ &z_1=(1,0,0),\ z_2=(2,3,0),\ z_3=(4,5,6),\ z_4=(7,8,9) \end{aligned}$$