Matematica- Prova parziale del 07.11.2014- Traccia di risoluzione

Di seguito riportiamo una risoluzione tipo per ciascuno degli esercizi della prova parziale del 07/11/2014, versione 1.

1. I limite:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{5x+4\ln(x)}{3x+2\ln(x)} = \frac{+\infty}{+\infty} = \textit{forma di indecisione}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(5+4\frac{\ln(x)}{x}\right)}{x\left(3+2\frac{\ln(x)}{x}\right)} = \frac{5+0}{3+0} = \frac{5}{3}$$

II limite:

$$\lim_{x\to0^+} \frac{5x+4\ln(x)}{3x+2\ln(x)} = \frac{-\infty}{-\infty} = \textit{forma di indecisione}$$
$$= \lim_{x\to0^+} \frac{\ln(x)\left(5\frac{x}{\ln(x)}+4\right)}{\ln(x)\left(3\frac{x}{\ln(x)}+2\right)} = \frac{0+4}{0+2} = \frac{4}{2} = 2$$

III limite:

$$\lim_{x\to1} \frac{e^x-e}{x-1} = \frac{0}{0} = \textit{forma di indecisione}$$
$$= \lim_{x\to1} \frac{e\left(e^{x-1}-1\right)}{x-1} \overset{y=x-1}{=} \lim_{y\to0} \frac{e\left(e^y-1\right)}{y} = e\cdot\lim_{y\to0}\frac{e^y-1}{y} = e$$

2. La funzione $\ln^2(1+\ln(x))$ è definita per

$$\begin{cases} x>0 \\ 1+\ln(x)>0 \end{cases}$$

La seconda disequazione è verificata per

$$\ln(x) > -1 \quad \ln(x) > \ln(e^{-1}) \quad x > \frac{1}{e}.$$

Quindi il dominio naturale di f è

$$D =]\frac{1}{e}, +\infty[.$$

La funzione $f = i\left(g\left(h\left(g(x)\right)\right)\right)$ è composizione di funzioni derivabili nel loro dominio:

$$x \overset{g}{\mapsto} \ln(x)$$
$$y \overset{h}{\mapsto} y+1$$
$$z \overset{i}{\mapsto} t^2,$$

quindi è derivabile su

$$D =]\frac{1}{e}, +\infty[.$$

Si ha

$$\begin{aligned}
\mathrm{D} \ln^2 (1 + \ln(x)) &= 2 \ln (1 + \ln(x))^{2-1} \cdot \mathrm{D} \ln (1 + \ln(x)) \\
&= 2 \ln (1 + \ln(x)) \cdot \frac{1}{1 + \ln(x)} \cdot \mathrm{D} (1 + \ln(x)) \\
&= \frac{2 \ln (1 + \ln(x))}{1 + \ln(x)} \cdot \frac{1}{x}
\end{aligned}$$

3.

$$f(x) = \begin{cases} e^{ax} - 3 & \text{per } x \leq 0 \\ b + \ln(1 + 2x) & \text{per } x > 0 \end{cases}$$

Derivabilità di f in 0: Per essere derivabile in 0, f deve essere almeno continua in 0. f è definita in un intorno bilatero di zero, quindi è continua se e solo se esistono e sono uguali tra loro i limiti sinistro e destro:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0^-} f(x) &= \lim_{x \to 0^-} (e^{ax} - 3) = -2, \\
\lim_{x \to 0^+} f(x) &= \lim_{x \to 0^+} (b + \ln (1 + 2x)) = b.
\end{aligned}$$

Dunque f è continua in 0 se e solo se $b = -2$. f è derivabile in 0 se e solo se esistono e sono uguali fra loro le derivate sinistra e destra di f in 0 :

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}_- f(x) &= \mathrm{D}_- (e^{ax} - 3) = ae^{ax}, \\
f'_-(0) &= (\mathrm{D}_- f(x))_{x=0} = a; \\
\mathrm{D}_+ f(x) &= \mathrm{D}_+ (-2 + \ln(1 + 2x)) = \frac{1}{2x + 1} \cdot 2, \\
f'_+(0) &= (\mathrm{D}_+ f(x))_{x=0} = 2;
\end{aligned}$$

dunque la funzione f è derivabile in 0 se e solo se $a = 2$ e $b = -2$:

$$f(x) = \begin{cases} e^{2x} - 3 & \text{per } x \leq 0 \\ -2 + \ln(1 + 2x) & \text{per } x > 0 \end{cases}$$

La funzione f' è data da

$$f'(x) = \begin{cases} 2e^{2x} & \text{per } x \leq 0 \\ \frac{2}{1+2x} & \text{per } x > 0 \end{cases}$$

f è derivabile due volte in 0 se e solo se esistono e sono uguali fra loro le derivate sinistra e destra di f' in 0 :

$$\begin{aligned} f''_{-}(0) &= \left(D_{-}f'(x)\right)_{x=0} = \left(4e^{2x}\right)_{x=0} = 4; \\ f''_{+}(0) &= \left(D_{+}f'(x)\right)_{x=0} = \left(\frac{-2\cdot 2}{(1+2x)^2}\right)_{x=0} = -4. \end{aligned}$$

La funzione f non è derivabile due volte in 0.

4. Consideriamo la funzione

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Osserviamo che f è dispari.

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}} = +\infty \cdot 0 = \textit{forma di indecisione} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{\frac{x^2}{2}}} = 0^+.$$

Ciò segue dal teorema dei due carabinieri in quanto

$$0 \le \frac{x}{e^{\frac{x^2}{2}}} \le \frac{x}{e^x} \quad e \quad \frac{x}{e^x} \to 0 \ \ per \ \ x \to +\infty.$$

Analogamente, visto che la funzione f è dispari, si avrà

$$\lim_{x\to-\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}} = 0^-.$$

La funzione è definita e derivabile su tutto $\mathbf{R}$, e si ha

$$Df(x) = D\left(xe^{-\frac{x^2}{2}}\right) = \left(1-x^2\right)e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Segno della derivata, crescenza e decrescenza:

$$\begin{array}{r|ccccc} x & & -1 & & +1 & \\ \textit{segno di } f'(x) & - & 0 & + & 0 & - \\ f(x) & \searrow & & \nearrow & & \searrow \end{array}$$

La funzione f
-è decrescente su $]-\infty,-1]$;
-ha un punto di minimo globale in -1;
-è crescente su $[-1,1]$;
-ha un punto di massimo globale in 1;
-è decrescente su $[1,+\infty[$.

Il grafico di f e' riportato in un file a parte.

Il minimo ed il massimo globale sono rispettivamente:

$$f(-1) = -\frac{1}{\sqrt{e}}; \quad f(1) = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Dunque

$$f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{e}} < e, \quad \forall x \in \mathbb{R};$$

di conseguenza l'equazione $f(x) = e$ non ha soluzioni.

5. Si ha:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} = 0.$$

Ciò segue dal teorema dei due carabinieri in quanto

$$-\frac{1}{2n-1} \leq \frac{(-1)^n}{2n-1} \leq \frac{1}{2n-1}$$

e le successioni $-\frac{1}{2n-1}$ e $\frac{1}{2n-1}$ tendono a 0 per $n \to +\infty$.
Verifichiamo che, per ogni $\varepsilon > 0$ possiamo trovare un intero naturale N_ε tale che la disequazione

$$\left| \frac{(-1)^n}{2n-1} - 0 \right| < \varepsilon$$

sia soddisfatta per ogni $n > N_\varepsilon$. Si ha

$$\left| \frac{(-1)^n}{2n-1} - 0 \right| < \varepsilon \iff \frac{|(-1)^n|}{|2n-1|} < \varepsilon \iff \frac{|-1|^n}{2n-1} < \varepsilon \iff \frac{1}{2n-1} < \varepsilon$$
$$\iff 1 < \varepsilon(2n-1) \iff 2n\varepsilon > 1 + \varepsilon \iff n > \frac{1+\varepsilon}{2\varepsilon}$$

È quindi sufficiente prendere come N_ε un qualsiasi intero naturale maggiore di $\frac{1+\varepsilon}{2\varepsilon}$.