Matematica- Prova parziale del 07.11.2014- Soluzioni 2

Di seguito riportiamo una risoluzione per ciascuno degli esercizi della prova parziale del 07/11/2014, versione 2.

1. I limite:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+3\ln(x)}{4x+5\ln(x)} &= \frac{+\infty}{+\infty} = \textit{forma di indecisione}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(2+3\frac{\ln(x)}{x}\right)}{x\left(4+5\frac{\ln(x)}{x}\right)} = \frac{2+0}{4+0} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

   II limite:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^+}\frac{2x+3\ln(x)}{4x+5\ln(x)} &= \frac{-\infty}{-\infty} = \textit{forma di indecisione}\\ &= \lim_{x\to0^+}\frac{\ln(x)\left(2\frac{x}{\ln(x)}+3\right)}{\ln(x)\left(4\frac{x}{\ln(x)}+5\right)} = \frac{0+3}{0+5} = \frac{3}{5}\end{aligned}$$

   III limite: cfr. traccia di risoluzione versione 1.

2. cfr. traccia di risoluzione versione 1.

3.

$$f(x) = \begin{cases} e^{ax}+3 & \textit{per } x \le 0 \\ b+\ln(1+2x) & \textit{per } x > 0 \end{cases}$$

   Derivabilità di f in 0: Per essere derivabile in 0, f deve essere almeno continua in 0. f è definita in un intorno bilatero di zero, quindi è continua se e solo se esistono e sono uguali tra loro i limiti sinistro e destro:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^-} f(x) &= \lim_{x\to0^-}(e^{ax}+3) = 4,\\ \lim_{x\to0^+} f(x) &= \lim_{x\to0^+}(b+\ln(1+2x)) = b.\end{aligned}$$

   Dunque f è continua in 0 se e solo se $b=4$.

   f è derivabile in 0 se e solo se esistono e sono uguali fra loro le derivate sinistra e destra di f in 0 :

$$\begin{aligned}\mathrm{D}_- f(x) &= \mathrm{D}_-(e^{ax}+3) = ae^{ax},\\ f'_-(0) &= (\mathrm{D}_- f(x))_{x=0} = a;\\ \mathrm{D}_+ f(x) &= \mathrm{D}_+(4+\ln(1+2x)) = \frac{1}{2x+1}\cdot 2,\\ f'_+(0) &= (\mathrm{D}_+ f(x))_{x=0} = 2;\end{aligned}$$

dunque la funzione f è derivabile in 0 se e solo se $a = 2$ e $b = 4$:

$$f(x) = \begin{cases} e^{2x} + 3 & per\ x \leq 0 \\ 4 + \ln(1 + 2x) & per\ x > 0 \end{cases}$$

La funzione f' è data da

$$f'(x) = \begin{cases} 2e^{2x} & per\ x \leq 0 \\ \frac{2}{1+2x} & per\ x > 0 \end{cases}$$

f è derivabile due volte in 0 se e solo se esistono e sono uguali fra loro le derivate sinistra e destra di f' in 0 :

$$\begin{aligned} f''_-(0) &= \left(D_- f'(x)\right)_{x=0} = \left(4e^{2x}\right)_{x=0} = 4; \\ f''_+(0) &= \left(D_+ f'(x)\right)_{x=0} = \left(\frac{-2 \cdot 2}{(1+2x)^2}\right)_{x=0} = -4. \end{aligned}$$

La funzione f non è derivabile due volte in 0.

4. Consideriamo la funzione

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = -xe^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Osserviamo che f è dispari.

$$\lim_{x \to +\infty} -xe^{-\frac{x^2}{2}} = -\infty \cdot 0 = forma\ di\ indecisione = \lim_{x \to +\infty} -\frac{x}{e^{\frac{x^2}{2}}} = 0^-.$$

Ciò segue dal teorema dei due carabinieri in quanto

$$0 \leq \frac{x}{e^{\frac{x^2}{2}}} \leq \frac{x}{e^x} \quad e \quad \frac{x}{e^x} \to 0^+ \ \ per\ \ x \to +\infty.$$

Analogamente, visto che la funzione f è dispari, si avrà

$$\lim_{x \to -\infty} -xe^{-\frac{x^2}{2}} = 0^+.$$

La funzione è definita e derivabile su tutto **R**, e si ha

$$Df(x) = D\left(-xe^{-\frac{x^2}{2}}\right) = \left(x^2 - 1\right) e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Segno della derivata, crescenza e decrescenza:

$$\begin{array}{c|ccccc} x & & -1 & & +1 & \\ segno\ di\ f'(x) & + & 0 & - & 0 & + \\ f(x) & \nearrow & & \searrow & & \nearrow \end{array}$$

La funzione f
-è crescente su $]-\infty,-1]$;
-ha un punto di massimo globale in -1;
-è decrescente su $[-1,1]$;
-ha un punto di minimo globale in 1;
-è crescente su $[1,+\infty[$.
Il massimo ed il minimo globale sono rispettivamente:

$$f(-1)=\frac{1}{\sqrt{e}}; \quad f(1)=-\frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Dunque

$$f(x)\leq\frac{1}{\sqrt{e}}<e \quad \forall x\in\mathbb{R};$$

di conseguenza l'equazione $f(x)=e$ non ha soluzioni.

Il grafico di f e' riportato in un file a parte.

5. Si ha:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=0.$$

Ciò segue dal teorema dei due carabinieri in quanto

$$-\frac{1}{2n+1}\leq\frac{(-1)^n}{2n+1}\leq\frac{1}{2n+1}$$

e le successioni $-\frac{1}{2n+1}$ e $\frac{1}{2n+1}$ tendono a 0 per $n\to+\infty$.
Verifichiamo che, per ogni $\varepsilon>0$ possiamo trovare un intero naturale N_ε tale che la disequazione

$$\left|\frac{(-1)^n}{2n+1}-0\right|<\varepsilon$$

sia soddisfatta per ogni $n>N_\varepsilon$.
Si ha

$$\left|\frac{(-1)^n}{2n+1}-0\right|<\varepsilon\Leftrightarrow\frac{|(-1)^n|}{|2n+1|}<\varepsilon\Leftrightarrow\frac{|-1|^n}{2n+1}<\varepsilon\Leftrightarrow\frac{1}{2n+1}<\varepsilon\Leftrightarrow$$
$$1<\varepsilon(2n+1)\Leftrightarrow 2n\varepsilon>1-\varepsilon\Leftrightarrow n>\frac{1-\varepsilon}{2\varepsilon}$$

È quindi sufficiente prendere come N_ε un qualsiasi intero naturale maggiore di $\frac{1-\varepsilon}{2\varepsilon}$.