

### Esercizi. Spazi vettoriali euclidei.

1. Nello spazio vettoriale  $\mathbb{R}^3$  sono dati i vettori

$$u = (0, 1, 1), \quad v = (1, 0, 1), \quad w = (0, 0, 2).$$

Stabilire se  $u, v, w$  formano una base di  $\mathbb{R}^3$  e in caso affermativo determinare le coordinate del vettore  $(3, 2, -1)$  rispetto a tale base.

2. Nel piano euclideo  $\mathbb{R}^2$  sono dati i vettori  $(1, 2), (3, 1)$ .

Si determini la proiezione ortogonale del secondo vettore sulla retta generata dal primo.

Si dia una verifica del risultato trovato.

3. Nello spazio euclideo  $\mathbb{R}^3$  sono dati i vettori  $(1, 1, 0), (1, -1, 1), (1, 3, 5)$ .

Si determini la proiezione ortogonale del terzo vettore sul piano generato dai primi due.

Si dia una verifica del risultato trovato.

4. Nello spazio vettoriale euclideo  $\mathbb{R}^4$  sono dati i vettori

$$a = (0, 0, 1, 2), \quad b = (0, 1, 2, 3), \quad c = (0, 1, 1, 1), \quad d = (1, 1, 1, 1).$$

Si determinino le dimensioni dei seguenti sottospazi:

$$\langle a \rangle \quad \langle a, b \rangle, \quad \langle a, b, c \rangle, \quad \langle a, b, d \rangle, \\ \{a\}^\perp, \quad \{a, b\}^\perp, \quad \{a, b, c\}^\perp, \quad \{a, b, d\}^\perp.$$

5. Si verifichi che nello spazio euclideo  $\mathbb{R}^n$  si ha

$$\|a + b\|^2 + \|a - b\|^2 = 2\|a\|^2 + 2\|b\|^2,$$

per ogni  $a, b \in \mathbb{R}^n$ . Qual'è il significato geometrico di questa identità?