Lezione del 13 ottobre. Limiti di funzioni, continuita'.

1. Il concetto di limite per le funzioni reali di variabile reale, nelle sue varie istanze, puo' essere ricondotto al concetto di limite per le successioni di numeri reali. Di seguito presentiamo questo approccio su tre esempi, poi diamo la definizione generale.

2. Consideriamo la funzione

$$f :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x}{x+1},$$

e ci poniamo il problema di descriverne il comportamento per valori di x arbitrariamente grandi. Un primo modo primitivo consiste nel considerare per un certo numero di valori di x i corrispondenti valori di $f(x)$. Un modo piu' profondo consiste nel considerare per una successione di valori di x che tende a $+\infty$ la successione dei corrispondenti valori di $f(x)$; ad esempio per la successione di valori $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ di x che tende a $+\infty$ si ottiene la successione di valori $1/2, 2/3, 3/4, \ldots, n/(n+1), \ldots$ di $f(x)$; osserviamo che si ha

$$f(n) = \frac{n}{n+1} \to 1^-.$$

Il modo piu' profondo consiste nel considerare per ciascuna successione di valori della x che tende a $+\infty$ la successione dei corrispondenti valori di $f(x)$; cio' e fattibile: consideriamo una qualsiasi successione (a_n) di valori di x in $]-1, +\infty[$ tale che $a_n \to +\infty$, e la corrispondente successione $f(a_n)$ di valori di $f(x)$; osserviamo che si ha

$$f(a_n) = \frac{a_n}{a_n + 1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{a_n}} \to 1^-.$$

Abbiamo trovato che per ciascuna successione (a_n) in $]-1, +\infty[$ che tende a $+\infty$ si ha che la successione $f(a_n)$ tende a 1^-. Esprimiamo questo fatto dicendo che " la funzione $f(x) = x/(x+1)$ tende a 1^- per x che tende a $+\infty$ ", o che " il limite della funzione $f(x) = x/(x+1)$ per x che tende a $+\infty$ e' 1^- ", e scriviamo

$$f(x) \to 1^- \ \ per \ \ x \to +\infty, \quad o \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 1^-.$$

3. Consideriamo la funzione

$$f : (\mathbb{R} - \{0\}) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 2^{\frac{1}{x}}.$$

Per descrivere il comportamento di $f(x)$ per valori di x positivi arbitrariamente vicini a 0 consideriamo una qualsiasi successione (a_n) in $\mathbb{R} - \{0\}$ tale che $a_n \to 0^+$ (successioni cosiffatte esistono: ad esempio $a_n = 1/n$); per la corrispondente successione $f(a_n)$ si ha

$$f(a_n) = 2^{\frac{1}{a_n}} \to 2^{\frac{1}{0^+}} = 2^{+\infty} = +\infty.$$

Esprimiamo questo fatto dicendo che " la funzione $f(x) = 2^{1/x}$ tende a $+\infty$ per x che tende a 0^+ ", o che " il limite della funzione $f(x) = 2^{1/x}$ per x che tende a 0^+ e' $+\infty$ ", e scriviamo

$$f(x) \to +\infty \ \ per \ \ x \to 0^+, \quad o \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty.$$

Per descrivere il comportamento di $f(x)$ per valori di x negativi arbitrariamente vicini a 0 consideriamo una qualsiasi successione (a_n) in $\mathbb{R} - \{0\}$ tale che $a_n \to 0^-$ (successioni cosiffatte esistono: ad esempio $a_n = -1/n$); per la corrispondente successione $f(a_n)$ si ha

$$f(a_n) = 2^{\frac{1}{a_n}} \to 2^{\frac{1}{0^-}} = 2^{-\infty} = 0^+.$$

Esprimiamo questo fatto dicendo che " la funzione $f(x) = 2^{1/x}$ tende a 0^+ per x che tende a 0^- ", o che " il limite della funzione $f(x) = 2^{1/x}$ per x che tende a 0^- e' 0^+ ", e scriviamo

$$f(x) \to 0^+ \ \ per \ \ x \to 0^-, \quad o \quad \lim_{x \to 0^-} f(x) = 0^+.$$

Per descrivere il comportamento di $f(x)$ per valori di x arbitrariamente vicini a 0 (senza condizioni sul segno) consideriamo una qualsiasi successione (a_n) in $\mathbb{R} - \{0\}$ tale che $a_n \to 0$; per la successione $f(a_n)$ si puo' avere $f(a_n) \to +\infty$ (ad esempio per $a_n = 1/n$), si puo' avere $f(a_n) \to 0^+$ (ad esempio per $a_n = -1/n$), cosi' come si puo' avere che $f(a_n)$ non tende ad alcun limite (ad esempio per $a_n = (-1)^n/n$). Esprimiamo questo fatto dicendo che " non esiste il limite della funzione $f(x) = 2^{1/x}$ per x che tende a 0 ", e scriviamo

$$\nexists \lim_{x \to 0} f(x).$$

4. **Definizione 1** *Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ un sottinsieme dell'insieme dei numeri reali e $b \in \mathbb{R}^*$ un numero reale esteso. Diciamo che b e' un punto di accumulazione per A se e solo se esiste qualche successione (a_n) contenuta in $A - \{b\}$ tale che $a_n \to b$.*

   Esempi.

   - Consideriamo l'insieme $[0,1[$. Ogni punto $b \in [0,1[$ e' di accumulazione per $[0,1[$; lo si motivi per esercizio. Il punto $b = 1$ e' di accumulazione per $[0,1[$; una successione di elementi di $[0,1[$ diversi da 1 che converge a 1 e' data ad esempio da $a_n = n/(n+1)$ per $n = 0,1,2,\ldots$ Ogni punto b con $b < 0$ oppure $b > 1$ non e' di accumulazione per $[0,1[$; lo si motivi per esercizio.

- Consideriamo l'insieme $[0, +\infty[$. Ogni punto $b \in [0, +\infty[$ e' di accumulazione per $[0, +\infty[$. Il punto $b = +\infty$ e' di accumulazione per $[0, +\infty[$; una successione di elementi di $[0, +\infty[$ diversi da $+\infty$ che converge a $+\infty$ e' data ad esempio da $a_n = n$ per $n = 0, 1, 2, \ldots$ Nessun punto b con $b < 0$ e' di accumulazione per $[0, +\infty[$.

- Consideriamo l'insieme $\mathbb{N}$. Il punto $b = +\infty$ e' di accumulazione per $\mathbb{N}$. Il punto $b = 0$ non e' di accumulazione per $\mathbb{N}$; infatti se (a_n) e' una successione di elementi di $\mathbb{N}$ diversi da 0, allora si ha $a_n \geq 1$ per ogni n e dunque a_n non puo' convergere a 0. Nessun punto di $\mathbb{N}$ e' di accumulazione per $\mathbb{N}$; lo si provi per esercizio. Infine nessun punto b in $\mathbb{R} - \mathbb{N}$ e' di accumulazione per $\mathbb{N}$; lo si provi per esercizio.

Si hanno analoghe definizioni di punto di accumulazione sinistra e di punto di accumulazione destra di un insieme.

5. **Definizione 2** *Siano $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione, $x_0 \in \mathbb{R}^*$ un numero reale esteso che sia un punto di accumulazione per A, $l \in \mathbb{R}^*$ un numero reale esteso. Si dice che la funzione $f(x)$ tende a l per x che tende a x_0, o che il limite della funzione $f(x)$ per x che tende a x_0 e' l, e si scrive*

$$f(x) \to l \;\; per \;\; x \to x_0, \quad o \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = l.$$

se e solo se $f(a_n) \to l$ per ogni successione (a_n) contenuta in $A - \{x_0\}$ con $a_n \to x_0$.

In modo analogo per $x_0 \in \mathbb{R}$ si definiscono nozioni del tipo " $f(x)$ tende a l per x che tende a x_0 da sinistra (o da destra) ", per $l \in \mathbb{R}$ si definiscono nozioni del tipo " $f(x)$ tende a l dal di sotto (o dal di sopra) per x che tende a x_0 ", e loro combinazioni, cui corrispondono scritture del tipo

$$f(x) \to l \;\; per \;\; x \to x_0^- \;\; (o \; per \; x \to x_0^+)$$
$$f(x) \to l^- \;\; (o \; f(x) \to l^-) \;\; per \;\; x \to x_0$$

e loro combinazioni. Si ha

Proposizione 1 *Siano $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione e $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione per A. Si ha che il limite di $f(x)$ per $x \to x_0$ esiste se e solo se esistono e sono uguali i limiti di $f(x)$ per $x \to x_0^-$ e per $x \to x_0^+$; in tal caso si ha*

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x).$$

6. Di seguito consideriamo le funzioni potenza, esponenziali, logaritmi e trigonometriche. Per ciascuna di queste funzioni, per ciascun punto di accumulazione del suo dominio naturale stabiliamo il corrispondente limite. Questi limiti in buona parte possono essere ricavati direttamente dai limiti delle successioni di tipo potenza, esponenziale, logaritmo, trigonometrico.

Per ciascuna di queste funzioni f si ha che ogni punto x_0 del dominio naturale di f e' di accumulazione per tale dominio, esiste il limite di $f(x)$ per $x \to x_0$ ed e' uguale al valore di f in x_0 :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Per ciascuna funzione, per i punti di accumulazione del dominio naturale, ma non appartenenti a tale dominio, i limiti sono i seguenti (i casi non specificati sono lasciati al lettore)

1- Funzioni potenza ad esponente intero positivo $x \mapsto x^n$, $x \in \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{Z}^+)$

x_0	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x\to x_0} x^n \quad (n\ dispari)$	...	$+\infty$
$\lim_{x\to x_0} x^n \quad (n\ pari)$	...	$+\infty$

2- Funzioni potenza ad esponente intero negativo $x \mapsto x^n$, $x \in (\mathbb{R} - \{0\})$, $(n \in \mathbb{Z}^-)$;

x_0	$-\infty$	0^-	0^+	$+\infty$
$\lim_{x\to x_0} x^n \quad (n\ dispari)$	...	...	$+\infty$	0^+
$\lim_{x\to x_0} x^n \quad (n\ pari)$	...	...	$+\infty$	0^+

3- Funzioni potenza ad esponente reale positivo $x \mapsto x^\alpha$, $x \in [0, +\infty[$ $(\alpha \in \mathbb{R}^+)$

x_0	$+\infty$
$\lim_{x\to x_0} x^\alpha$	$+\infty$

4- Funzioni potenza ad esponente reale negativo $x \mapsto x^\alpha$, $x \in]0, +\infty[$ $(\alpha \in \mathbb{R}^-)$

x_0	0^+	$+\infty$
$\lim_{x\to x_0} x^\alpha$	$+\infty$	0^+

5- Funzioni esponenziali $x \mapsto b^x$, $x \in \mathbb{R}$ $(0 < b \neq 1)$

x_0	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x\to x_0} b^x \quad (1 < b)$	0^+	$+\infty$
$\lim_{x\to x_0} b^x \quad (0 < b < 1)$	...	...

5- Funzioni logaritmo $x \mapsto \log_b(x)$, $x \in]0, +\infty[$ $(0 < b \neq 1)$

x_0	0^+	$+\infty$
$\lim_{x\to x_0} \log_b(x) \quad (1 < b)$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x\to x_0} \log_b(x) \quad (0 < b < 1)$	...	...

6- Funzione coseno, seno $x \mapsto \cos(x)$, $x \in \mathbb{R}$; $x \mapsto \sin(x)$, $x \in \mathbb{R}$;

x_0	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x\to x_0} \cos(x)$	...	...
$\lim_{x\to x_0} \sin(x)$	...	...

7- Funzione tangente $x \mapsto \tan(x)$, $x \in \left(\mathbb{R} - \{\left(\frac{1}{2}+k\right)\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}\right)$;

x_0	$-\infty$	$\left(\frac{1}{2}+k\right)\pi^-$	$\left(\frac{1}{2}+k\right)\pi^+$	$+\infty$
$\lim_{x\to x_0}\tan(x)$	...	$+\infty$	$-\infty$	...

7. Osserviamo esplicitamente che il limite di una funzione f per x che tende a x_0 dipende dai valori di f nelle vicinanze di x_0, ma non dipende dal valore che eventualmente f assume in x_0. Ad esempio, per la funzione

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=\begin{cases} 1 & per \quad x=0\\ -1 & per \quad x\neq 0\end{cases}$$

si ha

$$\lim_{x\to 0} f(x) = -1.$$

8. **Funzioni continue**

Informalmente, una funzione definita su un intervallo e' continua se e solo se il suo grafico e' una linea senza strappi.

Definizione 3 *Siano $f: I \to \mathbb{R}$ una funzione definita su un intervallo non ridotto a un punto (o su una unione di tali intervalli) e $x_0 \in A$. Diciamo che f e' continua in x_0 se e solo se esiste $\lim_{x\to x_0} f(x)$ e $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Diciamo che f e' continua su I se e solo se f e' continua in ciascun punto di I.*

Per quanto osservato in precedenza si ha che ciascuna funzione potenza, esponenziale, logaritmo, trigonometrica, e' continua nel suo dominio naturale.

Un esempio di funzione non continua e' stato dato nel punto precedente. Altri esempi:

-Sia $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la funzione definita da $g(x)=\lfloor x\rfloor$, dove $\lfloor x\rfloor$ e' la parte intera di x, cioe' il massimo intero minore-uguale a x. La funzione g non e' continua in 0 in quanto si ha $\lim_{x\to 0^-} g(x) = -1$ e $\lim_{x\to 0^+} g(x) = 0$ quindi non esiste $\lim_{x\to 0} g(x)$. Piu' in generale la funzione g non e' continua in ogni intero.

-Sia $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la funzione definita da

$$h(x)=\begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & per \quad x\neq 0\\ 0 & per \quad x=0\end{cases}$$

Osserviamo per x che tende a 0^+ si ha che $1/x$ tende $+\infty$ e $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ continua ad oscillare fra -1 e 1, dunque non esiste $\lim_{x\to 0^+} h(x)$ e h non e' continua in 0.

Piu' formalmente, consideriamo la successione

$$\left(\frac{2}{n\pi}\right)_{n=1}^{+\infty} \quad cioe' \;\; 2/\pi, 2/(2\pi), 2/(3\pi), 2/(4\pi), \ldots$$

che converge a 0^+ e osserviamo che la successione dei valori corrispondenti di h

$$h\left(\frac{2}{n\pi}\right) = \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) \quad cioe' \;\; 1, 0, -1, 0, 1, \ldots$$

non converge ad alcun numero reale; dunque non esiste $\lim_{x\to 0^+} h(x)$ e h non e' continua in 0.

9. **Teorema dei valori intermedi**

Teorema 1 *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ continua su I, con I intervallo di $\mathbb{R}$. Allora per ogni x_1 e x_2 in I ed ogni y^* compreso fra $f(x_1)$ e $f(x_2)$ esiste almeno un x^* compreso fra x_1 e x_2 tale che $f(x^*) = y^*$.*

Non diamo la dimostrazione. Come conseguenza si ha teorema degli zeri

Teorema 2 *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua su $[a, b]$, e i valori $f(a)$ e $f(b)$ siano discordi. Allora esiste almeno un x^* compreso fra a e b tale che $f(x^*) = 0$.*

Un'applicazione. E' data l'equazione

$$x^3 + 3x^2 - 3x - 6 = 0;$$

ci chiediamo se ha qualche soluzione. Consideriamo la funzione

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^3 + 3x^2 - 3x - 6.$$

Si ha che

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

dunque esistono due valori $a < b$ in $\mathbb{R}$ tali che $f(a) < 0 < f(b)$; per tentativi troviamo che $f(1) = -5$ e $f(2) = 8$. Inoltre f e' continua su $\mathbb{R}$. Dunque la funzione f soddisfa le ipotesi del teorema degli zeri sull'intervallo $[1, 2]$, ed esiste un x^* con $1 < x^* < 2$ tale che $f(x^*) = 0$. In altri termini, l'equazione data ha almeno una soluzione compresa fra 1 e 2.

Ora, si ha che $f(3/2) = -3/8$. Dunque possiamo applicare il teorema degli zeri alla funzione f sull'intervallo $[3/2, 2]$ ed ottenere che l'equazione ha almeno una soluzione in questo intervallo. Si puo' allora proseguire ...