Lezione del 15 ottobre. Limiti di funzioni. Calcolo di limiti.

1. Sia dato un punto $c \in \mathbb{R}$; per ciascun numero reale positivo $\delta > 0$, l'insieme dei punti che distano da c per meno di δ, cioe' l'intervallo
$$]c-\delta, c+\delta[$$
si dice " intorno di c di semiampiezza δ "; si noti che c e' un punto di accumulazione per ciascuno dei suoi intorni, anche se tale intorno viene privato del punto c stesso.

   Ciascun intervallo $]a, +\infty[$ si dice " intorno di $+\infty$ "; si noti che $+\infty$ e' un punto di accumulazione per ciascuno dei suoi intorni. Analoga definizione e considerazione valgono per gli intorni di $-\infty$.

   Al posto di dire che una proprieta' vale in un opportuno intorno di un punto $c \in \mathbb{R}^*$, diremo in breve che tale proprieta' vale " vicino a c. "

2. Nei casi che considereremo, la defnzione di limite data in precedenza risultera' essere equivalente alla definizione seguente.

   Sia f una funzione reale di variabile reale, definita vicino a un punto $c \in \mathbb{R}^*$ tranne al piu' in c stesso, e sia $l \in \mathbb{R}^*$. Diciamo che " $f(x)$ tende ad l per x che tende a x_0 " e scriviamo
$$f(x) \to l \ \ per \ \ x \to x_0$$
se e solo se per ogni successione (a_n) di termini $a_n \neq c$ diversi da c, con $a_n \to c$ si ha
$$f(a_n) \to l.$$

3. **Limiti e operazioni aritmetiche**

   Dal buon comportamento dell'operazione di limite rispetto alle operazioni aritmetiche nel caso delle successioni segue il buon comportamento dell'operazione di limite rispetto alle operazioni aritmetiche nel caso delle funzioni.

   Siano f, g funzioni reali definite vicino a $c \in \mathbb{R}^*$, tranne al piu' in c. Se
$$f(x) \to l_1 \ \ e \ \ g(x) \to l_2 \quad per \quad x \to c, \qquad (l_1, l_2 \in \mathbb{R}^*)$$
allora si ha
$$\begin{aligned} f(x) \pm g(x) &\to l_1 \pm l_2 \\ f(x)g(x) &\to l_1 l_2 \\ \frac{f(x)}{g(x)} &\to \frac{l_1}{l_2} \qquad (g(x) \neq 0 \ vicino \ a \ c) \end{aligned}$$
a patto che le parti destre siano definite in $\mathbb{R}^*$.

   Di conseguenza si ha il buon comportamento della proprieta' di continuita' rispetto alle operazioni aritmetiche

Siano f, g funzioni definite vicino a $c \in \mathbb{R}$. Se f e g sono continue in c, allora sono continue in c anche le funzioni $f \pm g$, fg, $\frac{f}{g}$ (con $g(x) \neq 0$ vicino a c). Lo stesso risultato si ha assumendo che f, g siano definite in un intervallo I non ridotto a un punto (o unione di tali intervalli) e sostituendo la continuita' in c con la continuita' in I.

In particolare, si ha che

1- ogni funzione polinomiale

$$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0, \qquad (a_n \neq 0)$$

e' continua su $\mathbb{R}$, inoltre

$$\lim_{x \to +\infty} p(x) = \lim_{x \to +\infty} a_n x^n = \begin{cases} +\infty & per \quad a_n > 0 \\ -\infty & per \quad a_n < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} p(x) = \lim_{x \to -\infty} a_n x^n = \begin{cases} -\infty & per \quad a_n > 0 \\ +\infty & per \quad a_n < 0 \end{cases}$$

2- ogni funzione razionale

$$f(x) = \frac{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0} \qquad (a_n, b_m \neq 0)$$

e' continua nel suo dominio di definizione, che e' l'insieme $\mathbb{R}$ privato delle radici del denominatore.

I limiti di $f(x)$ per x che tende a $\pm\infty$ sono dati da

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} = \begin{cases} \infty & per \quad n > m \\ \frac{a_n}{b_n} & per \quad n = m \\ 0 & per \quad n < m \end{cases}$$

dove i segni di ∞ e 0 non sono indicati, e si sottintende che sono determinati in base all'usuale regola dei segni.

I limiti di $f(x)$ per x che tende a $c^{\pm}$ per ciascuna radice c del denominatore si possono determinare usando il buon comportamemto dei limiti rispetto all'operazione di divisione; se numeratore e denominatore non hanno fattori in comune, questi limiti non presentano forme di indecisione, e sono $\pm\infty$.

4. Esempio.

Consideriamo la funzione

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 2};$$

questa funzione ha per dominio naturale l'insieme

$$A = \left(\mathbb{R} - \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\} \right)$$

ed e' continua su questo insieme. Osserviamo che $f(-x) = -f(x)$ per ogni x, cioe' f e' una funzione dispari.

Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2-2} = 0^+;$$

$$\lim_{x\to\sqrt{2}^+} \frac{x}{x^2-2} = \frac{\sqrt{2}}{0^+} = +\infty;$$

$$\lim_{x\to\sqrt{2}^-} \frac{x}{x^2-2} = \frac{\sqrt{2}}{0^-} = -\infty.$$

Essendo f una funzione dispari, si ha pure

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2-2} = 0^-;$$

$$\lim_{x\to-\sqrt{2}^-} \frac{x}{x^2-2} = \frac{\sqrt{2}}{0^+} = -\infty;$$

$$\lim_{x\to-\sqrt{2}^+} \frac{x}{x^2-2} = \frac{\sqrt{2}}{0^-} = +\infty.$$

Si lascia al lettore dare una rappresentazione del grafico di f compatibile con queste informazioni.

5. L'operazione di limite si comporta abbastanza bene rispetto all'operazione di composizione di funzioni. Torneremo piu' avanti su questo fatto, per il momento enunciamo che la proprieta' di continuita' si comporta bene rispetto all'operazione di composizione di funzioni.

   > Siano f una funzione definita vicino a un punto $c \in \mathbb{R}$, g una funzione definita vicino al punto $f(c)$, e $g \circ f$ la funzione composta di g dopo f, che risulta definita vicino al punto $c \in \mathbb{R}$. Se f e' continua in c e g e' continua in $f(c)$ allora $g \circ f$ e' continua in c. Da cio' segue che se $f : A \to B$ e $g : C \to \mathbb{R}$ sono due funzioni continue sui loro domini con $B \subseteq C$, allora anche la funzione composta $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ e' continua sul suo dominio.

   Esempio.

   Consideriamo la funzione

$$f(x) = \frac{1}{1 - 2\sqrt{1-x^2}};$$

   questa funzione puo' essere scomposta come composizione di funzioni continue, ne risulta che e' continua sul suo dominio naturale

$$A = \left([-1,1] - \{-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\}\right).$$

Per esercizio, si determinino i limiti di $f(x)$ per x che tende a ± 1 e $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ e si dia una rappresentazione del grafico di f compatibile con le informazioni trovate.

6. **Limiti e relazione d'ordine**

   Dal buon comportamento dell'operazione di limite rispetto alla relazione d'ordine nel caso delle successioni segue il buon comportamento dell'operazione di limite rispetto alla relazione d'ordine nel caso delle funzioni.

   Siano f, g due funzioni definite vicino a un punto $c \in \mathbb{R}^*$, tranne al piu' in c, che hanno limite per $x \to c$. Se $f(x) \geq g(x)$ per x vicino a c, allora

   $$\lim_{x \to c} f(x) \geq \lim_{x \to c} g(x).$$

   In particolare, se f e' una funzione definita vicino a $c \in \mathbb{R}^*$, tranne al piu' in c, che ammette limite per $x \to c$, e $f(x) \geq 0$ per x vicino a c, allora

   $$\lim_{x \to c} f(x) \geq 0.$$

   Risulta spesso utile il seguente

   Teorema 1 *Siano f_1, f, f_2 tre funzioni definite vicino a un punto $c \in \mathbb{R}^*$ (tranne al piu' ijn c), con $f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x)$ per x vicino a c. Se $f_1(x) \to l$ e $f_2(x) \to l$ per $x \to c$ allora anche $f(x) \to l$ per $x \to c$.*

   Questo teorema viene detto "teorema dei due carabinieri" (f_1 ed f_2 sono immaginati come carabinieri, f come carcerato, ed l come prigione).

   Esempio. Consideriamo la funzione

   $$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{-x} \sin(x)$$

   e ci chiediamo se ammette limite per $x \to +\infty$. Osserviamo che

   $$\begin{aligned} -e^{-x} \leq& e^{-x} \sin(x) \leq e^{-x} \qquad (\forall x \in \mathbb{R}) \\ \lim_{x \to +\infty} -e^{-x} =& 0 = \lim_{x \to +\infty} e^{-x}. \end{aligned}$$

   Possiamo allora applicare il teorema dei due carabinieri alle funzioni $f_1(x) = -e^{-x}$, $f(x)$, $f_2(x) = e^{-x}$, e otteniamo

   $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

7. Sia $f : (A \subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ una funzione reale di variabile reale. Se si pensa l'input x come coordinata temporale e l'output $f(x)$ come coordinata su una retta, allora si puo' immaginare la funzione f come la legge del moto di un punto che si muove su una retta. In questo modo la funzione $x \to \sin(x)$ si puo' immaginare come un'oscillazione uniforme intorno al punto 0, e la funzione $x \to e^{-x} \sin(x)$ si puo' immaginare come un'oscillazione smorzata intorno al punto 0.

8. **Confronto fra esponenziali, potenze e logaritmi**

   Il torema di confronto fra esponenziali, potenze e logaritmi si estende dal caso delle successioni al caso della funzioni.

   Ciascuna funzione esponenziale $x \mapsto b^x$ (con $b > 1$) tende a $+\infty$ piu' velocemente di ciascuna funzione potenza $x \mapsto x^\alpha$ (con $\alpha > 0$) che a sua volta tende a $+\infty$ piu' velocemente di ciascuna funzione logaritmo $x \mapsto \log_b x$ (con $b > 1$):
$$\frac{b^x}{x^\alpha} \to +\infty, \quad \frac{x^\alpha}{\log_b x} \to +\infty, \qquad (per\ x \to +\infty)$$

9. **Limiti notevoli**

   Segnaliamo alcuni limiti notevoli; informalmente, ciascuno di essi afferma che una certa funzione della variabile x tende a 0 esattamente come x per $x \to 0$.

   I primi due riguardano la funzione esponenziale e la funzione logaritmo (entrambe con base il numero di Nepero e)
$$\frac{e^x - 1}{x} \to 1, \ \ per\ x \to 0$$
$$\frac{\ln(1+x)}{x} \to 1, \ \ per\ x \to 0;$$
   e il terzo la funzione seno
$$\frac{\sin(x)}{x} \to 1, \ \ per\ x \to 0;$$
   quest'ultimo limite afferma che la lunghezza di una corda di circonferenza tende a 0 esattamente come la lunghezza dell'arco di circonferenza che la sottende.

10. **Limiti, sostituzione di variabili**

    Per i calcolo dei limiti risulta utile il seguente fatto

    > Sia $h(x)$ una funzione definita vicino a un punto x_0 (tranne al piu' in x_0); supponiamo che $h(x)$ si possa scrivere come
    > $$h(x) = g(y), \quad con \quad y = f(x),$$
    > dove:
    > $f(x)$ sia funzione definita vicino a x_0 (tranne al piu' in x_0) che tende a un limite y_0 per x che tende a x_0, e $f(x) \neq y_0$ vicino a x_0;
    > $g(y)$ sia funzione definita vicino a y_0 (tranne al piu' in y_0) che ammette limite per y che tende a y_0.
    > Allora la funzione $h(x)$ ammette limite per x che tende a x_0 e si ha
    > $$\lim_{x \to x_0} h(x) = \lim_{x \to y_0} g(y).$$

Esempio. Consideriamo la funzione $e^{\frac{x^2}{1-x}}$ e ci chiediamo se ammette limite per $x \to +\infty$. Osserviamo che:
questa funzione puo' essere pensata come e^y, dove $y = \frac{x^2}{1-x}$
si ha $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{1-x} = -\infty$
si ha $\lim_{y\to-\infty} e^y = 0^-$.
Allora si ha

$$\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{x^2}{1-x}} = \lim_{y\to-\infty} e^y = 0^-.$$

Qualche altro esempio, senza commenti.

$$\lim_{x\to0^+} x\ln(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{-\ln(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to+\infty} \frac{-\ln(y)}{y} = 0^-.$$

$$\lim_{x\to0} \frac{\sin(2x)}{x} = \lim_{x\to0} \frac{\sin(2x)}{2x}2 = \lim_{y\to0} \frac{\sin(y)}{y}2 = 2.$$

$$\lim_{x\to0} \frac{2^x-1}{x} = \lim_{x\to0} \frac{e^{\ln(2)x}-1}{\ln(2)x}\ln(2) = \lim_{y\to0} \frac{e^y-1}{y}\ln(2) = \ln(2).$$

$$\lim_{x\to0} \frac{e^{x^2}-1}{x} = \lim_{x\to0} \frac{e^{x^2}-1}{x^2}x = \lim_{y\to0} \frac{e^y-1}{y} \lim_{x\to0} x = 0.$$