**Lezione del 17 ottobre. Derivate**

1. **Derivata di una funzione in un punto**

**Definizione 1** *Sia $f$ una funzione definita in un intorno $I$ di un punto $x_0$. Per ciascun $x \in I$ con $x \neq x_0$ consideriamo: l'incremento $x - x_0$ da $x_0$ a $x$, l'incremento $f(x) - f(x_0)$ da $f(x_0)$ a $f(x)$, e il " rapporto incrementale di $f$ da $x_0$ a $x$ "*

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0};$$

*diciamo che " $f$ e' derivabile in $x_0$ " se e solo se il rapporto incrementale di $f$ da $x_0$ a $x$ converge a un numero reale per $x \to x_0$; il limite si dice " derivata di $f$ in $x_0$ " e si scrive $f'(x_0)$; in simboli:*

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Alcuni esempi.

1- Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione costante $f(x) = c$, e sia $x_0 \in \mathbb{R}$; per $x \in \mathbb{R}$ con $x \neq x_0$ si ha

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{c - c}{x - x_0} = 0 \ \to \ 0 \ \ per \ \ x \to x_0,$$

cosi' $f'(x_0) = 0$. Dunque una funzione costante e' derivabile in ogni punto, e in ciascun punto ha derivata nulla.

2- Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un polinomio di primo grado $f(x) = mx + q$, e sia $x_0 \in \mathbb{R}$; per $x \in \mathbb{R}$ con $x \neq x_0$ si ha

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{mx + q - (mx_0 + q)}{x - x_0} = m \ \to \ m \ \ per \ \ x \to x_0,$$

cosi' $f'(x_0) = m$. Dunque un polinomio di primo grado e' derivabile in ogni punto, e in ciascun punto ha derivata uguale al coefficiente del termine di I grado.

3- Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ il monomio di secondo grado $f(x) = x^2$, e sia $x_0 \in \mathbb{R}$; per $x \in \mathbb{R}$ con $x \neq x_0$ si ha

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = x + x_0 \ \to \ 2x_0 \ \ per \ \ x \to x_0,$$

cosi' $f'(x_0) = 2x_0$. Dunque il monomio di secondo grado e' derivabile in ogni punto, e in ciascun punto ha derivata uguale al doppio dell'ordinata del punto.

2. Un modo equivalente di definire rapporti incrementali e derivata.

   **Definizione 2** *Sia $f$ una funzione definita in un intorno $I$ di un punto $x_0$.*

   *Per ciascun $h \in \mathbb{R}$ abbastanza piccolo con $h \neq 0$ consideriamo: l'incremento $h$ da $x_0$ a $x_0 + h$, l'incremento $f(x_0 + h) - f(x_0)$ da $f(x_0)$ a $f(x_0 + h)$, e il " rapporto incrementale di $f$ da $x_0$ con incremento $h$ "*

   $$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h};$$

   *diciamo che " $f$ e' derivabile in $x_0$ " se e solo se il rapporto incrementale di $f$ da $x_0$ con incremento $h$ converge a un numero reale per $h \to 0$; il limite si dice " derivata di $f$ in $x_0$ " e si scrive $f'(x_0)$; in simboli:*

   $$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

   Esempio.

   3- Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ il monomio di secondo grado $f(x) = x^2$, e sia $x_0 \in \mathbb{R}$; per $h \in \mathbb{R}$ con $h \neq x_0$ si ha

   $$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} = 2x_0 + h \ \to \ 2x_0 \ \ per \ \ h \to 0,$$

   cosi' $f'(x_0) = 2x_0$.

3. **Interpretazione geometrica**

   Sia data una funzione $f$ definita in un intorno $I$ di un punto $x_0$. A ciascun punto $x \in I$ sull'asse delle ascisse corrisponde un punto $f(x)$ sull'asse delle ordinate, e questi due punti individuano un punto $P = (x, f(x))$ del grafico di $f$; indichiamo con $P_0 = (x_0, f(x_0))$ il punto di associato a $x_0$.

   Per ciascun $x \in I$ con $x \neq x_0$ si ha

   $$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \ pendenza\ del\ segmento\ P_0P.$$

   Dunque l'evenienza che il rapporto incrementale da $x_0$ a $x$ tenda a un limite finito equivale l'evenienza che la pendenza del segmento $P_0P$ tenda a una pendenza limite finita, per $x \to x_0$. In caso affermativo, diciamo che la derivata $f'(x_0)$ di $f$ in $x_0$ e' la " pendenza del grafico di $f$ in $P_0$ " e diciamo che la retta per $P_0$ avente pendenza $f'(x_0)$

   $$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

   e' la retta tangente al grafico di $f$ in $P_0$.

4. **Esempio**

   Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$; il grafico di $f$ e' la parabola di equazione $y = x^2$.

   Per $x_0 = \frac{1}{2}$ si ha $f'(\frac{1}{2}) = 1$;

   la tangente al grafico di $f$ nel suo punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ e' la retta di equazione

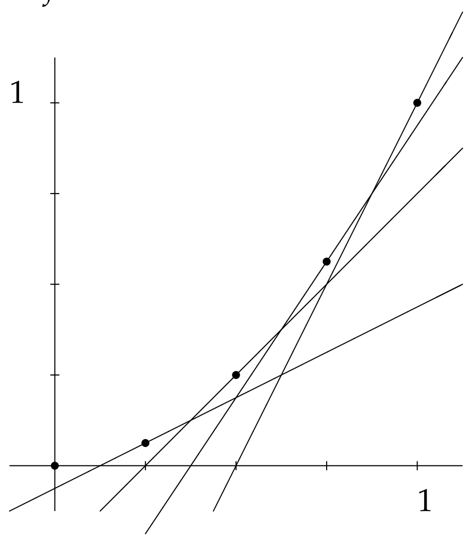
   $$y - \tfrac{1}{4} = 1 \cdot (x - \tfrac{1}{2}), \qquad \textit{cioe'} \qquad y = x - \tfrac{1}{4}.$$

   Per ciascun $x_0 \in \mathbb{R}$ si ha $f'(x_0) = 2x_0$.

   La tangente al grafico $y = x^2$ di $f$ nel suo punto $(x_0, x_0^2)$ e' la retta

   $$y - x_0^2 = 2x_0(x - x_0), \qquad \textit{cioe'} \qquad y = 2x_0 x - x_0^2.$$

   Nella figura seguente riportiamo alcuni punti del grafico di $f$, e le rette tangenti in essi al grafico di $f$.




5. **Interpretazione cinematica**

   Sia data una funzione $f$ definita in un intorno $I$ di un punto $x_0$. Interpretiamo $x$ come coordinata di tempo (rispetto ad un certo riferimento), $f(x)$ come coordinata di posizione su una retta (rispetto ad un certo riferimento), e quindi interpretiamo $f$ come la legge del moto di un punto materiale $\mathfrak{p}$ su una retta.

   Per ciascun istante $x \in I$ con $x \neq x_0$ si ha

   $$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \textit{ velocita' media di } \mathfrak{p} \textit{ nell'intervallo } [x_0, x].$$

   Dunque l'evenienza che il rapporto incrementale da $x_0$ a $x$ tenda a un limite finito equivale l'evenienza che la velocita' media del punto $\mathfrak{p}$ nell'intervallo $[x_0, x]$ tenda a una velocita' limite finita, per $x \to x_0$. In caso affermativo, diciamo che la derivata $f'(x_0)$ di $f$ in $x_0$ e' la " velocita' istantanea del punto $\mathfrak{p}$ all'istante $x_0$. "

6. **Derivate destre, sinistre**

**Definizione 3** *Sia data una funzione $f$ definita in un intorno destro $I$ di un punto $x_0$. Diciamo " derivata destra di $f$ in $x_0$ " ed indichiamo con $f'_+(x_0)$ il limite, se esiste, del rapporto incrementale di $f$ da $x_0$ a $x$ per $x \to x_0^+$; in simboli:*

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

*Equivalentemente:*

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Analogamente:

**Definizione 4** *Sia data una funzione $f$ definita in un intorno sinistro $I$ di un punto $x_0$. Diciamo " derivata sinistra di $f$ in $x_0$ " ed indichiamo con $f'_-(x_0)$ il limite, se esiste, del rapporto incrementale di $f$ da $x_0$ a $x$ per $x \to x_0^-$; in simboli:*

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

*Equivalentemente ...*

Si ha

**Proposizione 1** *Sia data una funzione $f$ definita in un intorno $I$ di un punto $x_0$. La funzione $f$ ha derivata in $x_0$ se e solo se ha derivata destra in $x_0$, ha derivata sinistra in $x_0$ e tali derivate coincidono; in tal caso, il valore comune di tali derivate e' la derivata di $f$ in $x_0$ : $f'_-(x_0) = f'(x_0) = f'_+(x_0)$.*

7. **Altri esempi**

1- Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 0 & per \quad x = 0 \\ 1 & per \quad x \neq 0 \end{cases},$$

e il punto $x_0 = 0$. Ci chiediamo se $f$ ha derivata destra in 0. Si ha

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{1}{h} \ \to \ +\infty \ \ per \ \ h \to 0^+$$

Dunque $f$ non ha derivata destra in 0. Cio' basta per affermare che $f$ non e' derivabile in 0. Ci chiediamo se $f$ ha derivata sinistra in 0. Si ha

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{1}{h} \ \to \ -\infty \ \ per \ \ h \to 0^-.$$

Dunque $f$ non ha derivata sinistra in 0.

Questi risultati potevano essere previsti usando l'interpretazione geometrica della derivata.

2- Consideriamo la funzione $g : [0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ definita da $g(x) = \sqrt{x}$. e il punto $x_0 = 0$. La funzione non e' definita in alcun intorno sinistro di 0, dunque non e' definta alcuna derivata sinistra in 0. Ci chiediamo se $g$ ha derivata destra in 0. Si ha

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{\sqrt{h} - \sqrt{0}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}} \ \to \ +\infty \ \ per \ \ h \to 0^+.$$

Dunque $g$ non ha derivata destra in 0.

Questi risultati potevano essere previsti usando l'interpretazione geometrica della derivata.

3- Consideriamo la funzione $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $v(x) = |x|$, e il punto $x_0 = 0$. Per $h > 0$ si ha

$$\frac{v(0+h) - v(0)}{h} = \frac{h}{h} = 1 \ \to \ 1 \ \ per \ \ h \to 0^+.$$

Dunque $v$ ha derivata destra in 0 e $v'_+(0) = 1$. Per $h < 0$ si ha

$$\frac{v(0+h) - v(0)}{h} = \frac{-h}{h} = -1 \ \to \ -1 \ \ per \ \ h \to 0^+.$$

Dunque $v$ ha derivata sinistra in 0 e $v'_-(0) = -1$. Le due derivate destra e sinistra di $v$ in 0 sono diverse, dunque si ha che $v$ non e' derivabile in 0.

Questi risultati potevano essere previsti usando l'interpretazione geometrica della derivata.

La funzione considerata nel primo esempio e' discontinua in 0 e non e' derivabile in 0; le funzioni considerate negli altri due esempi sono continue in 0 e non sono derivabili in 0.

**Proposizione 2** *Sia $f : I \to \mathbb{R}$, con $I$ intorno di $x_0$. Se $f$ e' derivabile in $x_0$ allora $f$ e' continua in $x_0$.*

**Dimostrazione**

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f(x) - f(x_0) \\ &= f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) \\ &\to \ f(x_0) + f'(x_0)0 = f(x_0) \quad per \ \ x \to x_0. \end{aligned}$$

8. Di solito, considereremo funzioni $f : A \to \mathbb{R}$, dove $A$ e' un intervallo, o un unione di intervalli (non ridotti a un punto). Se $f$ e' derivabile in ogni punto $x$ di $A$, allora si ha una funzione

   $A \to \mathbb{R} \qquad x \to f'(x)$

   che viene detta funzione derivata di $f$, ed indicata con $f'$.

   Ci sono vari modi di indicare la derivata di $f$ in un punto $x_0$ :

$$f'(x_0), \qquad \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0}, \qquad (Df)(x_0),$$

   cui corrispondono vari modi di indicare la funzione derivata:

$$f', \qquad \frac{df}{dx}, \qquad Df.$$

   Spesso una funzione viene considerata come un'espressione $f(x)$ in una variabile reale $x$, e la derivazione come un'operatore, indicato con $\frac{d}{dx}$ o $D$, che trasforma l'espressione $f(x)$ in una nuova espressione

$$\frac{d}{dx}(f(x)), \qquad D(f(x)).$$

9. Alcuni esempi di funzioni derivate di funzioni potenza.

   1- Abbiamo visto che la funzione potenza

   $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto x^2$

   e' derivabile sul suo dominio $\mathbb{R}$, e la sua funzione derivata e' data da

   $\frac{d}{dx}\left(x^2\right) = 2x.$

   2- Consideriamo ora

   $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto x^3.$

   Fissato un qualsiasi $x_0 \in \mathbb{R}$, per $x \in \mathbb{R}$ si ha

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x^2 + xx_0 + x_0^2)}{x - x_0}$$
$$= x^2 + xx_0 + x_0^2 \ \to \ 3x_0^2 \quad per \ \ x \to x_0.$$

   Dunque la funzione $x \mapsto x^3$ e' derivabile sul suo dominio $\mathbb{R}$, e la sua funzione derivata e' data da

   $\frac{d}{dx}\left(x^3\right) = 3x^2.$

   3- Consideriamo ora

   $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto x^n,$

dove $n$ e' un intero positivo. Fissato un qualsiasi $x_0 \in \mathbb{R}$, per $x \in \mathbb{R}$ si ha

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{x^n - x_0^n}{x-x_0} = \frac{(x-x_0)(x^{n-1}+x^{n-2}x_0+\cdots+x_0^{n-1})}{x-x_0}$$
$$= x^{n-1}+x^{n-2}x_0+\cdots+x_0^{n-1} \;\to\; nx_0^{n-1} \;\; per \;\; x \to x_0.$$

Dunque la funzione $x \mapsto x^3$ e' derivabile sul suo dominio $\mathbb{R}$, e la sua funzione derivata e' data da

$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$.

10. **Funzioni potenza.**

Ciascuna funzione potenza

$]0,+\infty[ \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto x^\alpha \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$

e' derivabile sul suo dominio $]0,+\infty[$, e la sua funzione derivata e' data da

$$\frac{d}{dx}(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Per $\alpha \geq 0$ la funzione potenza $x^\alpha$ e' definita anche per $x = 0$; se $\alpha \geq 1$, allora la funzione e' derivabile anche in 0, e si ha $dx^\alpha/dx|_{x=0} = 0$; se $0 < \alpha < 1$, la funzione non e' derivabile in $x = 0$.

Per $\alpha \in \mathbb{Z}$ la funzione potenza $x^\alpha$ e' definita e derivabile su $\mathbb{R} \setminus 0$, e se $\alpha \neq 0$ e' definita e derivabile su tutto $\mathbb{R}$; vale sempre la regola di derivazione soprascritta.

11. **Funzione esponenziale.**

La funzione esponenziale

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto e^x$

e' derivabile su $\mathbb{R}$ e coincide con la sua funzione derivata:

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x.$$

Questo fatto deriva da un limite notevole sull'esponenziale. Dato $x_0 \in \mathbb{R}$, si ha

$$\frac{e^{x_0+h}-e^{x_0}}{h} = e^{x_0}\frac{e^h-1}{h},$$

passando al limite per $h \to 0$ si ha

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^{x_0+h}-e^{x_0}}{h} = e^{x_0}\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = e^{x_0}\cdot 1 = e^{x_0};$$

dunque $\left.\frac{de^x}{dx}\right|_{x=x_0} = e^{x_0}, \forall x_0 \in \mathbb{R}$.

12. **Funzione Logaritmo.**

La funzione logaritmo

$$]0, +\infty[ \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \log x;$$

e' derivabile sul suo dominio $]0, +\infty[$ e la sua funzione derivata e':

$$\frac{d}{dx}(\log x) = \frac{1}{x}.$$

Questo fatto deriva da un limite notevole sul logaritmo. Dato $x_0 \in \mathbb{R}$, si ha

$$\frac{\log(x_0 + h) - \log x_0}{h} = \frac{\log\left(\frac{x_0+h}{x_0}\right)}{h} = \frac{\log\left(1 + \frac{h}{x_0}\right)}{h} = \frac{\log\left(1 + \frac{h}{x_0}\right)}{\frac{h}{x_0}} \frac{1}{x_0},$$

passando al limite per $h \to 0$ si ha

$$\lim_{h\to 0} \frac{\log(x_0 + h) - \log x_0}{h} = \frac{1}{x_0} \lim_{h\to 0} \frac{\log\left(1 + \frac{h}{x_0}\right)}{\frac{h}{x_0}} = \frac{1}{x_0} \cdot 1 = \frac{1}{x_0};$$

dunque $\left.\frac{d \log x}{dx}\right|_{x=x_0} = \frac{1}{x_0}$, $\forall x_0 \in \mathbb{R}$.

13. **Funzioni trigonometriche**

La funzione seno

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \sin x$$

e' derivabile su $\mathbb{R}$ e la sua funzione derivata e':

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x.$$

La funzione coseno

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \cos x$$

e' derivabile su $\mathbb{R}$ e la sua funzione derivata e':

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x.$$