Lezioni del 22 e 24 settembre.

Numeri razionali.

1. **Operazioni, ordinamento.**

   Indichiamo con $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, Q$ gli insiemi dei numeri naturali, interi relativi, e razionali:

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &= \{0, 1, 2, \ldots\} \\ \mathbb{Z} &= \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\} \\ \mathbb{Q} &= \{\frac{m}{n};\ m, n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0\}; \end{aligned}$$

   i numeri naturali vengono identificati con gli interi relativi non negativi, e i numeri interi relativi vengono identificti con le frazioni a denominatore 1, cosi' si ha

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}.$$

   Concentriamo la nostra attenzione sull'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$. In $\mathbb{Q}$ sono definite

   - due operazioni, di somma $+$ e prodotto $\cdot$; ciascuna operazione e' associativa e commutativa, le due operazioni sono legate dalla proprieta' distributiva; ci sono dei numeri speciali, 0 e 1, che sono elementi neutri per le due operazioni; ogni $q \in Q$ possiede un opposto $-q \in \mathbb{Q}$, caratterizzato dalla condizione $q + (-q) = 0$, ogni $q \in Q$ diverso da 0 possiede un inverso $q^{-1} \in \mathbb{Q}$, caratterizzato dalla condizione $qq^{-1} = 1$;
   - una relazione d'ordine totale $\leq$, legata alle operazioni dalle proprieta' che $\forall a, b, c \in \mathbb{Q}$,

$$\begin{aligned} &a < b \quad \Rightarrow a + c < b + c; \\ &a < b \quad e \quad c > 0 \Rightarrow ac < bc; \\ &a < b \quad e \quad c < 0 \Rightarrow ac > bc. \end{aligned}$$

2. **Potenze con esponente intero relativo.**

   Per ogni numero razionale $a \in \mathbb{Q}$ e per ogni intero relativo $n \in \mathbb{Z}$, la potenza di base a ed esponente n e' definita da

$$a^n = \begin{cases} aa \cdots a \quad (n\ volte) & per\ n > 0; \\ 1 & per\ n = 0; \\ a^{-1}a^{-1} \cdots a^{-1} \quad (-n\ volte) & per\ n < 0; \end{cases};$$

   le potenze con esponente nullo o negativo sono definite solo per $a \neq 0$.

   Ad esempio si ha:

$(-\frac{2}{3})^{-2} = (-\frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4}$.

Le potenze ad esponente intero relativo hanno le seguenti proprieta':

$$a^m a^n = a^{m+n};$$
$$(a^m)^n = a^{mn};$$
$$(ab)^m = a^m b^m.$$

3. L'equazione

   $x^2 = 2$

   non ha soluzioni in $\mathbb{Q}$.

   Lo proviamo per assurdo. Supponiamo che l'equazione abbia soluzioni in $\mathbb{Q}$; allora l'equazione avra' due soluzioni, una opposta dell'altra; sia $\frac{m}{n}$ la soluzione positiva dell'equazione. Si ha dunque

   $\frac{m^2}{n^2} = 2; \qquad 2n^2 = m^2.$

   Ora, n ed m hanno una fattorizzazione in primi:

   $n = 2^a 3^b \cdots, \qquad a, b, \ldots \in \mathbb{N},$

   $m = 2^c 3^d \cdots, \qquad a, b, \ldots \in \mathbb{N}.$

   Sostituendo nell'equazione si ha

   $2(2^a 3^b \cdots)^2 = (2^c 3^d \cdots)^2,$

   cioe'

   $2^{2a+1} 3^{2b} \cdots = 2^{2c} 3^{2d} \cdots .$

   Osserviamo che l'esponente di 2 al primo membro e' dispari, mentre al secondo membro e' pari. Abbiamo cosi' un numero naturale che ha due fattorizzazioni in primi diverse, contro il teorema di fattorizazione unica.

4. Ogni frazione puo' essere riguardata come una divisione fra interi, questa divisione si puo' effettuare applicando "all'infinito" l'algoritmo della divisione, e si ottiene un numero decimale.

   Ad esempio si ha

   $$\frac{5}{6} = 5 : 6 = 0,8333\cdots = 0,8\overline{3};$$

   si e' ottenuto un numero decimale periodico.

   Non e' un caso: ogni frazione m/n equivale ad un numero decimale, limitato, o illimitato periodico. Ci si puo' rendere conto di questo fatto nel modo seguente. I possibili resti di una divisone per n sono $0, 1, \ldots, n-1$; dunque si ha che o uno dei resti parziali e' 0 e la divisione porge un numero decimale limitato, oppure, se nessuno dei resti parziali e' 0, dopo al piu' n passi si ottiene un resto parziale gia' ottenuto in precedenza e l'iterazione della divisione porge un numero decimale illimitato periodico.

Viceversa, ogni numero decimale limitato o illimitato periodico equivale ad una frazione. Per i numeri decimali limitati questa affermazione e' ovvia; per i numeri decimali illimitati periodici se ne vedra' una motivazione piu' avanti.

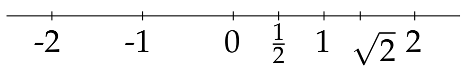
Per snellire il discorso, spesso riguarderemo i numeri decimali limitati come numeri decimali periodici di periodo 0. Osserviamo infine che esistono numeri decimali che non rappresentano alcun numero razionale: basta prendere un numero decimale illimitato non periodico, ad esempio $0,1010010001\dots$

Numeri reali

1. Un numero reale e' un'entita' che e' rappresentata da un numero decimale, limitato o illimitato, periodico o non periodico; l'insieme dei numeri reali viene indicaro con $\mathbb{R}$.

   L'insieme dei numeri razionali e' strettamente contenuto nell'insieme dei numeri reali:
   $$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$
   I numeri reali non razionali vengono detti irrazionali; alcuni numeri irrazionali famosi:
   $$\sqrt{2},\ \pi,\ e\ (Nepero).$$
   Le operazioni di somma e prodotto e l'ordinamento si estendono da $\mathbb{Q}$ ad $\mathbb{R}$, mantenendo le loro proprieta'. La definizione di queste operazioni sui reali non e' banale; noi svolgeremo dei calcoli espliciti solo sui razionali.

2. Scelti su una retta un primo ed un diverso secondo punto, l'identificazione del numero 0 col primo punto e del numero 1 col secondo punto si estende in modo naturale ad una identificazione prima dei numeri naturali, poi dei numeri interi relativi, poi dei numeri razionali, e infine dei numeri reali con i punti della retta: ogni numero reale e' identificato con un punto della retta, ed ogni punto della retta si ottiene da uno ed un solo numero reale.



3. Consideriamo l'equazione $x^2 = 2$ nell'incognita x in $\mathbb{R}$; dalle proprieta' delle operazioni e dell'ordine segue che, se questa equazione ha soluzioni, allora ne ha esattamente due, una opposta dell'altra. Cerchiamo dunque la soluzione positiva dell'equazione.

Consideriamo la disequazione $x^2 \leq 2$ nell'incognita x in $\mathbb{Q}^+$; fra le soluzioni intere ce ne e' una massima ed e' 1; fra le soluzioni con una cifra decimale ce ne e' una massima ed e' $1,4$; fra le soluzioni due cifre decimali ce ne e' una massima ed e' $1,41$; fra le soluzioni tre cifre decimali ce ne e' una massima ed e' $1,414$; ... si ottiene cosi' un numero reale $r = 1,414\ldots$. Si puo' dimostrare che $r^2 = 2$.

4. **Radici.**

   Consideriamo l'equazione $x^2 = b$ nell'incognita x in $\mathbb{R}$, dove b e' un numero reale. Se $b < 0$, per le proprieta' generali che legano operazioni ed ordinamento, si ha che l'equazione non ha alcuna soluzione; se $b = 0$, l'equazione ha l'unica soluzione $x = 0$; se $b > 0$ si puo' provare che l'equazione ha esattamente due soluzioni in $\mathbb{R}$, una opposta dell'altra.

   Per ogni $b \geq 0$ si pone per definizione

   $$\sqrt{b} = \textit{ unica soluzione reale non negativa di } x^2 = b;$$

   per $b < 0$ la radice $\sqrt{b}$ non e' definita.

   Consideriamo l'equazione $x^3 = b$ nell'incognita x in $\mathbb{R}$, dove b e' un numero reale. Per ogni b si puo' provare che l'equazione ha esattamente una soluzione, dello stesso segno di b.

   Per ogni $b \in \mathbb{R}$ si pone per definizione

   $$\sqrt[3]{b} = \textit{ unica soluzione reale di } x^3 = b.$$

   In modo analogo si definiscono le radici successive.

   Per ogni intero positivo n, l'operazione "radice $n-$ma" e' l'inversa dell'operazione "potenza $n-$ma", nel senso che valgono le identita' seguenti

   $$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a \qquad \begin{cases} \sqrt[n]{a^n} = a & \textit{per n dispari;} \\ \sqrt[n]{a^n} = |a| & \textit{per n pari.} \end{cases},$$

   per ogni $a \in \mathbb{R}$.

   Per semplicita', d'ora innanzi ci limiteremo a considerare radici di numeri maggiori-uguali a 0.

5. **Potenze con esponente razionale.**

   Le potenze ad esponente reciproco di un numero naturale si definiscono tramite le radici:

   $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}, \qquad (a \geq 0)$

   $a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a},$

$$a^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{a}, \qquad (a \geq 0)$$

$$\vdots$$

Per ogni numero reale positivo a e per ogni numero razionale $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, la potenza di base a ed esponente $\frac{m}{n}$ e' definita da

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m.$$

Ad esempio si ha

$$2^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^{-2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}.$$

Le proprieta' delle potenze ad esponente intero relativo continuano a valere per le potenze ad esponente razionale.

6. Per ogni numero reale positivo $a > 0$ e per ogni numero reale r, si puo' definire la potenza a^r di base a ed esponente r.

   Non diamo la definizione, ma solo un'idea intuitiva su un esempio.

   La potenza 2^π si puo' ottenere considerando la successione $3,\ 3{,}1,\ 3{,}14,\ \ldots$ di decimali che approssimano π, ed usando la corrispondente successione di potenze ad esponente razionale $2^3,\ 2^{3,1},\ 2^{3,14},\ \ldots$ per definire per approssimazione 2^π.

   Si dimostra che

   > *le proprieta' delle potenze continuano a valere per le potenze ad esponente reale.*

7. **Intervalli**

   Gli intervalli superiormente illimitati sono definiti da

   $$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} :\ x \geq a\},$$
   $$]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} :\ x > a\};$$

   gli intervalli inferiormente illimitati sono definiti da

   $$]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} :\ x \leq a\},$$
   $$]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} :\ x < a\}.$$

   L'intervallo aperto e l'intervallo chiuso di estremi $a \leq b$ sono definiti rispettivamente da

   $$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} :\ a < x < b\},$$
   $$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} :\ a \leq x \leq b\}.$$

   In modo analogo si definiscono gli intervalli limitati semi-aperti

   $$]a, b],\ [a, b[.$$

8. **Valore assoluto**

   Il valore assoluto di un numero reale a e' il numero reale $|a|$ definito da

$$|a| = \begin{cases} a & se\ a \geq 0 \\ -a & se\ a \leq 0; \end{cases} .$$

   Il valore assoluto e' legato all'ordinamento ed alle operazioni dalle proprieta'

$$\begin{aligned} |a| &\geq 0; \qquad |a| = 0\ se\ e\ solo\ se\ a = 0 \\ |ab| &= |a||b|; \\ |a+b| &\leq |a| + |b|, \end{aligned}$$

   per ogni $a, b \in R$.

   Osserviamo che

$$|a-b| = \left\{ \begin{array}{ll} a-b & se\ a \geq b \\ b-a & se\ b \leq a; \end{array} \right\} = \ (distanza\ fra\ a\ e\ b).$$

   per ogni $a, b \in \mathbb{R}$.

9. **Completezza**

   Nel passaggio dai numeri razionali ai numeri reali, l'ordinamento acquista una nuova proprieta'. Per presentarla, abbiamo bisogno di introdurre alcuni termini.

   Sia X un insieme con una relazione $\leq$ d'ordine totale (si pensi a $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$) e sia $A \subseteq X$ un sottinsieme non vuoto di X, e sia $b \in X$.

   - si dice che b e' "un maggiorante" di A se b e' maggiore-uguale ad ogni elemento di A, in simboli:

     $b \geq a, \quad \forall a \in A;$

     analogamente si definisce il termine "minorante" .
   - si dice che b e' "il massimo" di A, e si scrive $a = MaxA$, se

     $b \in A, \quad e \quad b \geq a, \quad \forall a \in A;$

     analogamente si definisce il termine "minimo" ;
   - si dice che b e' "l'estremo superiore" di A, e si scrive $b = supA$, se b e' il minimo dei maggioranti di A, in simboli:

     $b \geq a, \quad \forall a \in A;$

     $\forall\, c \in X,\ (c \geq a\ \forall a \in A)\ implica\ c \geq b;$

     analogamente si definisce il termine "estremo inferiore" .

   Ad esempio, in $X = \mathbb{Q}$ siano

   $A = \{x \in \mathbb{Q};\ x \leq 0\},$

$B = \{x \in \mathbb{Q};\ x < 0\}$,
$C = \{x \in \mathbb{Q};\ x \geq 0\}$,
$D = \{x \in \mathbb{Q};\ x^2 < 2\}$.

Si ha che:

0 e' il massimo di A;

non c'e' alcun elemento massimo per B, e 0 e' l'estremo superiore di B;

non c'e' alcun maggiorante di C,

non c'e' alcun estremo superiore per D.

Un'altra definizione:

Sia X un insieme con una relazione $\leq$ d'ordine totale. Un sottinsieme non vuoto $A \subseteq X$ di X si dice "superiormente limitato" in X se in X c'e' almeno un maggiorante di A; in modo analogo si definisce il termine "inferiormente limitato" .

Si ha che

> *In $\mathbb{R}$, ogni sottinsieme non vuoto superiormente limitato ha estremo superiore, ed ogni sottinsieme non vuoto inferiormente limitato ha estremo inferiore.*

Un esempio di uso tipico di questo fatto cruciale e' la definizione della lunghezza di una circonferenza come l'estremo superiore dei perimetri dei poligoni inscritti o come l'estremo inferiore dei perimetri dei poligoni circoscritti. Le prime valutazioni di cifre decimali di π furono trovate in questo modo (da Archimede).

La definizione riconduce la lunghezza della circonferenza al perimetro di poligoni e dunque alla lunghezza di segmenti di retta; non avrebbe senso definre la lunghezza della circonferenza come il massimo dei perimetri dei poligoni insritti nella circonferenza, poiche' tale massimo non esiste; non avrebbe senso definire la lunghezza della circonferenza come l'estremo superiore dei perimetri inscritti, se si avessero a disposizione solo i numeri razionali.