Lezione del 20 ottobre. Derivate, operazioni, massimi/minimi.

1. **Derivazione e operazioni aritmetiche sulle funzioni.**

   Il comportamento dell'operazione di derivazione di una funzione in un punto rispetto alle operazioni aritmetiche sulle funzioni si puo' descrivere come segue.

   > Siano f, g funzioni definite vicino a un punto x_0, derivabili in x_0. allora anche ciascuna delle funzioni $f+g$, $f-g$, fg, $\frac{f}{g}$ (con $g(x) \neq 0$ vicino a x_0) e' derivabile in x_0, inoltre
   >
   > $$\begin{aligned} (f+g)'(x_0) &= f'(x_0) + g'(x_0) \\ (f-g)'(x_0) &= f'(x_0) - g'(x_0) \\ (fg)'(x_0) &= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0) \\ \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2} \end{aligned}$$

   Di conseguenza, il comportamento dell'operazione di derivazione di una funzione rispetto alle operazioni aritmetiche sulle funzioni si puo' descrivere come segue.

   > Siano $f, g : I \to \mathbb{R}$ funzioni definite su un intervallo I (non ridotto a un punto), derivabili su I. Allora anche ciascuna delle funzioni $f+g$, $f-g$, fg, $\frac{f}{g} : I \to \mathbb{R}$ (con $g(x) \neq 0$ in I) e' derivabile su I, inoltre
   >
   > $$\begin{aligned} (f+g)' &= f' + g' \\ (f-g)' &= f' - g' \\ (fg)' &= f'g + fg' \\ (\frac{f}{g})' &= \frac{f'g - fg'}{g^2} \end{aligned}$$

   Spesso queste identita' vengono dette " regole di derivazione " della somma, differenza, prodotto, quoziente di funzioni.

   La regola di derivazione della somma si estende da due a tre o piu' in generale a un numero finito di addendi: $(f+g+h)' = (f+g)' + h' = f' + g' + h'$, o piu' in generale

   $$(f_1 + f_2 + \ldots + f_d)' = f_1' + f_2' + \ldots + f_d'.$$

   La regola di derivazione del prodotto si estende da due a tre o piu' in generale a un numero finito di fattori: $(fgh)' = (fg)'h + (fg)h = f'gh + fg'h + fgh'$, o piu' in generale

$$(f_1 f_2 \cdots f_d)' = f_1' f_2 \cdots f_d \; + \; f_1 f_2' \cdots f_d \; + \; \ldots \; + \; f_1 f_2 \cdots f_d'.$$

Altra notazione:

$$\begin{aligned} D(f+g) &= Df + Dg \\ D(f-g) &= Df - Dg \\ D(fg) &= (Df)g + f(Dg) \\ D\left(\frac{f}{g}\right) &= \frac{(Df)g - f(Dg)}{g^2} \end{aligned}$$

Se le funzioni sono date da espressioni in una variabile, e dunque la derivata viene vista come un operatore su tali espressioni, allora e' piu' naturale scrivere

$$\begin{aligned} D(f(x)+g(x)) &= Df(x) + Dg(x) \\ D(f(x)g(x)) &= (Df(x))g(x) + f(x)(Dg(x)) \\ \ldots &= \ldots \end{aligned}$$

2. Sappiamo che che

   $Dc = 0 \quad (c \; costante) \quad e \quad Dx = 1.$

   Dalla regola di derivazione del prodotto segue che per ogni funzione $f(x)$ derivabile su un intervallo I anche la funzione $cf(x)$ e' derivabile su I e

   $$D(cf(x)) = cDf(x).$$

   Infatti: $D(cf(x)) = D(c)f(x) + cDf(x) = 0f(x) + cDf(x) = cDf(x)$.

   La formula di derivazione per le funzioni potenza

   $$Dx^n = nx^{n-1} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

   puo' essere ricavata dalla regola di derivazione del prodotto. Infatti

   $$\begin{aligned} Dx^n &= D(xx\cdots x) \\ &= (Dx)x\cdots x \; + \; x(Dx)\cdots x \; + \; \ldots \; + \; xx\cdots(Dx) \\ &= 1x\cdots x \; + \; x1\cdots x \; + \; \ldots \; + \; xx\cdots 1 = nx^{n-1} \end{aligned}$$

3. In particolare, dai punti precedenti segue che:

   1- ogni funzione polinomiale

   $$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n \qquad (a_n \neq 0)$$

di grado $n \geq 1$ e' derivabile su $\mathbb{R}$, e la sua funzione derivata e' una funzione polinomiale

$$Dp(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1}$$

di grado $n-1$. Chiaramente anche le funzioni polinomiali di grado 0, cioe' le funzioni costanti non nulle, e anche la funzione costante nulla, sono derivabili ed hanno per derivata la funzione identicamente nulla.

2- ogni funzione razionale

$$h(x) = \frac{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m} \qquad (a_n, b_m \neq 0)$$

e' derivabile nel suo domino di definizione.

4. **Esempio.**

Nella lezione XI avevamo considerato la funzione razionale

$$f(x) = \frac{x}{x^2-2},$$

che ha per dominio naturale $A = \left(\mathbb{R} - \{\pm\sqrt{2}\}\right)$. Avevamo affermato che f e' continua su A, calcolato i limiti di f nei punti $+\infty$, $\sqrt{2}^+$, $\sqrt{2}^-$, $\ldots$, e avevamo dato una corrsipondente rappresentazione del grafico di f. Ora possiamo affermare che f e' derivabile su A, inoltre

$$\begin{aligned} Df(x) = D\,\frac{x}{x^2-2} &= \\ &= \frac{(Dx)(x^2-2) - xD(x^2-2)}{(x^2-2)^2} = \\ &= \frac{x^2-2-x2x}{(x^2-2)^2} = \frac{-x^2-2}{(x^2-2)^2}. \end{aligned}$$

In particolare si ha $(Df)(0) = -1/2$. Si lascia al lettore di dare una rappresentazione del grafico di f che contenga anche questa informazione.

5. Poiche' le funzioni coseno e seno sono derivabili su $\mathbb{R}$, la funzione tangente $\tan x = \sin(x)/\cos(x)$ e' derivabile nel suo dominio di definizione, cioe' su $A = (\mathbb{R} - \{\ldots, -\pi/2, \pi/2, \ldots\})$ inoltre si ha

$$\begin{aligned} D\tan(x) = D\,\frac{\sin x}{\cos x} &= \\ &= \frac{(D\sin x)\cos x - \sin x(D\cos x)}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x. \end{aligned}$$

6. Le regole di derivazione fondamentali sono quella della somma e del prodotto. Mostriamo come dalla regola di derivazione del prodotto segua la regola di derivazione del quoziente. Il quoziente f/g della funzione f sulla funzione g e' caratterizzato dall'uguaglianza

$$\left(\frac{f}{g}\right)g = f$$

Derivando entrambe i membri per la regola di derivazione del prodotto si ottiene

$$\left(D\,\frac{f}{g}\right)g + \frac{f}{g}(Dg) = Df$$

da cui si ricava

$$D\,\frac{f}{g} = \frac{Df}{g} - \frac{f}{g^2}Dg = \frac{(Df)g - f(Dg)}{g^2}.$$

7. **Derivazione e composizione di funzioni.**

   Il comportamento dell'operazione di derivazione di una funzione in un punto rispetto all'operazione di composizione di funzioni si puo' descrivere come segue.

   > Sia f definita vicino a x_0 e derivabile in x_0, e sia g definita vicino a $f(x_0)$ e derivabile in $f(x_0)$, allora anche $g \circ f$ e' (definita vicino a x_0 ed e') derivabile in x_0, inoltre
   >
   > $$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

   Di conseguenza, il comportamento dell'operazione di derivazione di una funzione rispetto all'operazione di composizione di funzioni si puo' descrivere come segue.

   > Siano $f : A \to B$ una funzione derivabile su A, e $g : B \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile su B, (A, B intervalli non ridotti a un punto) allora la funzione $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ e' derivabile su A, inoltre
   >
   > $$(g \circ f)' = (g' \circ f)f'.$$

   Altra notazione:

   $$D(g \circ f) = ((Dg) \circ f)(Df)$$

   Se le funzioni sono date da espressioni in una variabile, e dunque la derivata viene vista come un operatore su tali espressioni, allora la regola di derivazione puo' essere descritta informalmente nel modo seguente. Siano date due espressioni f e g in un variabile, e sia $g(f(x))$ l'espressione ottenuta sostituendo alla variabile di g l'espressione $f(x)$; allora la derivata di $g(f(x))$ rispetto a x

e' uguale al prodotto della derivata di $g(f(x))$ rispetto a $f(x)$ come se fosse $f(x))$ fosse la variabile, per la derivata di $f(x)$ rispetto alla variabile x :

$$\begin{aligned}
&\textit{derivata di } g(f(x)) \textit{ rispetto a } x \; = \\
&\qquad = (\textit{derivata di } g(f(x)) \textit{ rispetto a } f(x)) \cdot (\textit{derivata di } f(x) \textit{ rispetto a } x)
\end{aligned}$$

Alcuni esempi.

$$\begin{aligned}
D\left(\left(3x^2+2x+1\right)^{\frac{1}{2}}\right) &= \frac{1}{2}\left(3x^2+2x+1\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot D(3x^2+2x+1) \\
&= \frac{1}{2}\left(3x^2+2x+1\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot (6x+2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D\left(\sin^3(x^2)\right) &= 3\sin^2(x^2) \cdot D\sin(x^2) \\
&= 3\sin^2(x^2) \cdot \cos(x^2) \cdot D(x^2) \\
&= 3\sin^2(x^2) \cdot \cos(x^2) \cdot 2x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D\left(\left(3x^2+(2x+1)^{\frac{5}{4}}\right)^{\frac{3}{2}}\right) &= \frac{3}{2}\left(3x^2+(2x+1)^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot D\left(3x^2+(2x+1)^{\frac{5}{4}}\right) \\
&= \frac{3}{2}\left(3x^2+(2x+1)^{\frac{5}{4}}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(D\left(3x^2\right)+D\left((2x+1)^{\frac{5}{4}}\right)\right) \\
&= \frac{3}{2}\left(3x^2+(2x+1)^{\frac{5}{4}}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(6x+\frac{5}{4}(2x+1)^{\frac{1}{4}} \cdot D(2x+1)\right) \\
&= \frac{3}{2}\left(3x^2+(2x+1)^{\frac{5}{4}}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(6x+\frac{5}{4}(2x+1)^{\frac{1}{4}} \cdot 2\right) = \ldots
\end{aligned}$$

8. Massimi e minimi, globali e locali

Definizione 1 *Sia* $f : A \to \mathbb{R}$.

- un numero reale M si dice massimo globale di f se e solo se

$$M \geq f(x), \quad \forall x \in A;$$

ogni punto $c \in A$ tale che $f(c) = M$ si dice punto di massimo globale per f.

- un punto $c \in A$ si dice punto di massimo locale per f se e solo se esiste un intorno I di c tale che

$$f(c) \geq f(x), \quad \forall x \in I;$$

i valori assunti da f sui punti di massimo locale si dicono massimi locali di f.

In modo analogo si definiscono le nozioni di minimo globale per f, punto di minimo globale per f, punto di minimo locale per f minimo locale per f.

Al posto dei termine “globale” si usa anche il termine “assoluto”, e al posto dei termine “locale” si usa anche il termine “relativo”.

Si osservi che: una funzione puo′ non possedere alcun massimo globale, ma se ne possiede uno, esso e′ unico; una funzione puo′ possedere nessuno, uno, o piu′ di un punto di massimo globale; ogni massimo globale e′ anche un massimo locale; ogni punto di massimo globale e′ anche un punto di massimo locale.

Si lascia al lettore di costruire grafici di funzioni derivabili e di funzioni continue (ma non derivabili) su un intervallo (limitato o illimitato) che abbiano qualche punto di massimo locale che non e′ punto di massimo globale e qualche punto di minimo locale che non e′ punto di minimo globale.

Teorema 1 *(Fermat) Siano date una funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e un punto $c \in]a,b[$ (diverso da a e b) di massimo o minimo locale per f. Se f e′ derivabile in c, allora*

$$f'(c) = 0.$$

Dimostrazione. Supponiamo che c sia un punto di massimo locale per f. Cio′ significa che esiste un intorno I di c tale che $f(c) \geq f(x)$ per ogni $x \in I$. Essendo $c \neq a$, esistono dei punti $x \in I$ con $x < c$; per ciascuno di questi punti si ha

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0;$$

esiste il limite per $x \to c^-$, passando al limite si mantiene la disuguaglianza, e si ha $f'_-(c) \geq 0$. Essendo $c \neq b$, esistono dei punti $x \in I$ con $x > c$; per ciascuno di questi punti si ha

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0;$$

esiste il limite per $x \to c^+$, passando al limite si mantiene la disuguaglianza, e si ha $f'_+(c) \leq 0$. Esiste la derivata di f in c e si ha

$$0 \leq f'_-(c) \leq f'(c) \leq f'_+(c) \leq 0,$$

da cui $f'(c) = 0$.

9. Osserviamo esplicitamente che non e′ detto che data una funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e un punto $c \in]a,b[$ (diverso da a e b) tale che $f'(c) = 0$, allora si debba avere che c e′ un punto di massimo o minimo locale per f. Ad esempio, per la funzione
$$f(x) = x^3, \qquad x \in [-1,1]$$
si ha $f'(0) = 0$ ma 0 non e′ ne′ un punto di massimo locale ne′ un punto di minimo locale per f, in quanto f e′ strettamente crescente su $\mathbb{R}$.