Lezione del 22 ottobre.

1. **Teorema del valor medio**

   D'ora in poi ciascun intervallo considerato verra' tacitamente assunto non ridotto ad un punto.

   Data una funzione f definita su un intervallo $[a, b]$, derivabile su $[a, b]$, consideriamo le derivate $f'(x)$ di f nei punti x dell'intervallo $[a, b]$ in relazione al rapporto incrementale
   $$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$
   di f da a a b.

   Dal punto di vista geometrico, pensiamo al grafico di f sull'intervallo $[a, b]$ e consideriamo le pendenze delle rette tangenti al grafico di f in relazione alla pendenza del segmento che unisce i punti estremi del grafico di f. L'osservazione suggerisce che dovrebbe esistere sempre qualche retta tangente al grafico di f che ha la stessa pendenza del segmento che unisce i punti estremi del grafico di f.

   Dal punto di vista cinematico, pensiamo al moto rettilineo associato ad f nell'intervallo temporale $[a, b]$ e consideriamo le velocita' istantanee in relazione alla velocita' media nell'intervallo temporale $[a, b]$. L'osservazione suggerisce che dovrebbe esistere sempre qualche istante nel quale la velocita' istantanea e' uguale alla velocita' media nell'intervallo temporale $[a, b]$.

   Cosi' e', nel senso precisato dal seguente teorema, detto " teorema del valor medio " (di Lagrange).

   Teorema 1 *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, continua su $[a, b]$, derivabile su $]a, b[$; allora esiste qualche punto c nell'intervallo $]a, b[$ nel quale la derivata di f e' uguale al rapporto incrementale di f da a a b :*
   $$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

   Evidenziamo che come ipotesi del teorema non si assume che la funzione sia derivabile agli estremi dell'intervallo, e come tesi si garantisce l'esistenza di qualche punto c con l'asserita proprieta' diverso dagli estremi dell'intervallo.

   Il teorema afferma l'esistenza di punti (uno o piu' punti), ma non fornisce un modo per determinarli; l'importanza del teorema consiste nel ruolo che svolge nella teoria; da esso derivano delle proposizioni che danno dei metodi per risolvere problemi come la determinazine dei punti di minimo e massimo locale di una funzione.

2. **Derivata e monotonia**

   Osservazione.

   Sia f una funzione crescente su un intervallo I; per ogni due punti distinti x_1, x_2 in I, si ha che se $x_2 - x_1 > 0$ allora $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$ e se $x_2 - x_1 < 0$ allora $f(x_2) - f(x_1) \leq 0$, dunque in ogni caso il rapporto incrementale da x_1 a x_2 e' maggiore-uguale a 0:

   $$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq 0.$$

   Se f e' una funzione definita e crescente vicino a un punto x_0, derivabile in x_0, allora da

   $$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \qquad (x \text{ vicino a } x_0)$$

   si ha, per le proprieta' dell'operazione di limite rispetto all'ordine, che

   $$f'(x_0) \geq 0.$$

   Vale il viceversa, nel senso precisato dal seguente

   Teorema 2 *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, continua su $[a, b]$, derivabile su $]a, b[$; se $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in]a, b[$, allora f e' crescente su $[a, b]$.*

   Dimostrazione. Per ogni due punti $x_1 < x_2$ in $[a, b]$ si ha

   $$\begin{aligned} f(x_2) &= f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x_2 - x_1) \\ &= f(x_1) + f'(c)(x_2 - x_1) \geq f(x_1). \end{aligned}$$

   Nel passaggio centrale si e' applicato il teorema del valor medio alla funzione f sull'intervallo $[x_1, x_2]$, e si e' ottenuto che esiste un $c \in]x_1, x_2[$ tale che

   $$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1};$$

   nell'ultimo passaggio si e' usata l'ipotesi che $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in [a, b]$ e l'assunto $x_2 - x_1 > 0$.

   □

3. Valgono risultati analoghi per le funzioni decrescenti.

   Sia f una funzione decrescente su un intervallo I; per ogni due punti distinti x_1, x_2 in I, si ha

   $$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq 0.$$

   Se f e' una funzione definita e decrescente vicino a un punto x_0, derivabile in x_0, allora

   $$f'(x_0) \leq 0.$$

   Vale il viceversa, nel senso precisato dal seguente

Teorema 3 *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, continua su $[a,b]$, derivabile su $]a,b[$; se $f'(x) \leq 0$ per ogni $x \in]a,b[$, allora f e' decrescente su $[a,b]$.*

4. I risultati dei due punti precedenti si possono riassumere nel modo seguente.

   Teorema 4 *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, continua su $[a,b]$, derivabile su $]a,b[$. Si ha*
   -f e' crescente su $[a,b]$ se e solo se $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in]a,b[$;
   -f e' decrescente su $[a,b]$ se e solo se $f'(x) \leq 0$ per ogni $x \in]a,b[$.

   Da questo teorema discende il seguente criterio per la determinazione dei punti di minimo e massimo locale per una funzione derivabile.

   Proposizione 1 *Sia f derivabile vicino a un punto x_0.*
   -se $f'(x)$ e' $< 0, = 0, > 0$ rispettivamente per $x < x_0$, $x = x_0$, $x > x_0$, allora x_0 e' un punto di minimo locale per f;
   -se $f'(x)$ e' $> 0, = 0, < 0$ rispettivamente per $x < x_0$, $x = x_0$, $x > x_0$, allora x_0 e' un punto di massimo locale per f.

   Esempio. Consideriamo la funzione

   $$f(x) = x^5 - 15x^3.$$

   Cerchiamo gli eventuali massimi e minimi per f.

   Osserviamo che la funzione f e' definita e derivabile su $\mathbb{R}$ ed e' dispari.

   $f(x)$ tende a $+\infty$ e $-\infty$ per x che tende a $+\infty$ e $-\infty$, dunque f non possiede ne' massimo ne' minimo globale. La funzione derivata di f e'

   $$f'(x) = 5x^4 - 45x^2 = 5x^2(x^2 - 9);$$

   il segno di $f'(x)$ e la crescenza/decrescenza di $f(x)$ sono descritti dalla tabella

   $$\begin{array}{c|ccccccc} x & & -3 & & 0 & & 3 & \\ \text{segno di } f'(x) & + & 0 & - & 0 & - & 0 & + \\ f(x) & \nearrow & & \searrow & & \searrow & & \nearrow \end{array}$$

   Dunque la funzione f

   - ha un punto di massimo locale in -3, cui corrisponde il valore di massimo locale $f(-3) = 162$;

   - in 0 ha derivata nulla (e si ha $f(0) = 0$);

   - ha un punto di minimo locale in 3, cui corrisponde il valore di minimo locale $f(3) = -f(-3) = -162$

   Si lascia al lettore di dare una rappresentazione del grafico di f coerente con queste informazioni.

5. **Derivata seconda**

   Sia f una funzione definita vicino a un punto x_0; supponiamo che f sia derivabile vicino a x_0, cosi' che la funzione derivata f' sia definita vicino a x_0; se f' e' derivabile in x_0, allora si dice che *f e' derivabile due volte in x_0* ; la derivata di f' in x_0 si dice *derivata seconda di f in x_0* e si indica con $f''(x_0)$, in simboli:

   $$(f')'(x_0) = f''(x_0).$$

   Altre notazioni: $\frac{d^2f}{dx^2}(x_0)$, $(D^2f)(x_0)$.

   Sia f una funzione derivabile due volte in un punto x_0 (dunque f e' derivabile vicino ad x_0 e a maggior ragione defnita vicino ad x_0.) Osserviamo che per definizione si ha

   $$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}.$$

   Interpretando f come la legge del moto di un punto materiale $\mathfrak{p}$ che si muove su una retta. si ha che il rapporto incrementale

   $$\frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$$

   e' l'accelerazione media del punto $\mathfrak{p}$ nell'intervallo temporale $[x_0, x]$, e la derivata seconda $f''(x_0)$ e' l'accelerazione istantanea di $\mathfrak{p}$ all'istante x_0.

6. Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile su un intervallo I; se la funzione derivata $f' : I \to \mathbb{R}$ e' derivabile su I, allora si dice che *f e' derivabile due volte su I* ; la funzione derivata di f' si dice *derivata seconda di f* e si indica con f'' in simboli:

   $$(f')' = f''.$$

   Altre notazioni: $\frac{d^2f}{dx^2}$, D^2f.

   Se le funzioni sono date da espressioni in una variabile, e dunque la derivata viene vista come un operatore su tali espressioni, allora anche la derivata seconda viene vista come un operatore su tali funzioni, e si scrive $\frac{d^2}{dx^2}f(x)$, e $D^2f(x)$ al posto di $\frac{d^2f}{dx^2}(x)$ e $\left(D^2f\right)(x)$.

7. Le funzioni potenza, esponenziale, logaritmo, e trigonometriche sono derivabili due volte sul loro dominio di definizione (con le dovute puntualizzazioni per le funzioni potenze), le loro funzioni derivate seconde sono:

   - potenze

   $$x^\alpha \overset{\mathrm{D}}{\rightsquigarrow} \alpha x^{\alpha-1} \overset{\mathrm{D}}{\rightsquigarrow} \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}, \quad \textit{dunque} \quad D^2x^\alpha = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$$

   - esponenziale

   $$e^x \overset{D}{\rightsquigarrow} e^x \overset{D}{\rightsquigarrow} e^x \quad \textit{dunque} \quad D^2e^x = e^x$$

- logaritmo:

$$\ln(x) \overset{\mathrm{D}}{\rightsquigarrow} \tfrac{1}{x} \overset{\mathrm{D}}{\rightsquigarrow} -\tfrac{1}{x^2}, \quad dunque \quad D^2 \ln(x) = -\tfrac{1}{x^2}.$$

- funzioni trigonometriche ...

8. **Approssimazione del I ordine**

Sia f una funzione definita vicino a un punto x_0, derivabile in x_0. Il polinomio di grado al piu' uno

$$p_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \tag{1}$$

costituisce una buona approssimazione della funzione f vicino a x_0, nel senso del seguente

Teorema 5 *(Approssimazione del I ordine) Sia f una funzione definita vicino a un punto x_0, derivabile in x_0. Allora l'approssimazione di $f(x)$ vicino a x_0*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R_1(x, x_0),$$

col polinomio (1) di grado al piu' uno ha un resto $R_1(x; x_0)$ che per x tendente a x_0 tende a zero piu' velocemente dello scarto $x - x_0$:

$$\frac{R_1(x, x_0)}{(x - x_0)} \to 0 \ \ per \ \ x \to x_0.$$

Geometricamente, questo teorema si puo' esprimere nel modo seguente. Il grafico $y = p_1(x)$ del polinomio p_1 e' la retta tangente nel punto $(x_0, f(x_0)$ al grafico $y = f(x)$ della funzione f; per ciascun segmento orientato "orizzontale" sull'asse delle ascisse avente primo estremo x_0 consideriamo la retta per il secondo estremo parallela all'asse delle ordinate, e su questa retta il segmento orientato "verticale" tagliato dalla retta tangente e dal grafico di f; allora la misura del segmento verticale tende a zero piu' velocemente della misura del segmento orizzontale.

Dal punto di vista formale, il Teorema non e' nient'altro che una riscrittura della condizione che definisce la derivata di f in x_0; infatti la

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \to f'(x_0) \qquad per \ \ x \to x_0$$

puo' essere riscritta via via nelle forme seguenti

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + S(x; x_0) \qquad con \ \ S(x; x_0) \to 0 \ \ per \ \ x \to x_0$$

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + S(x; x_0)(x - x_0) \qquad \ldots$$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + S(x; x_0)(x - x_0) \qquad \ldots$$

... basta infine porre $R(x; x_0) = S(x; x_0)(x - x_0)$.

9. Il teorema di approssimazione del I ordine si puo0' esprimere anche nella forma

   Teorema 6 *(Approssimazione del I ordine) Sia f una funzione definita vicino a un punto x_0, derivabile in x_0. Allora per h vicino a 0 si ha*

   $$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + R_1(h; x_0),$$

   dove

   $$\frac{R_1(h; x_0)}{h} \to 0 \ \ per \ \ h \to 0.$$

10. **Approssimazione del II ordine**

    Sia f una funzione definita vicino a un punto x_0, derivabile due volte in x_0. Il polinomio di grado al piu' due

    $$p_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 \tag{2}$$

    costituisce una buona approssimazione della funzione f vicino a x_0, migliore di quella del polinomio p_1, nel senso del seguente

    Teorema 7 *(Approssimazione del II ordine) Sia f una funzione definita vicino a un punto x_0, derivabile due volte in x_0. Allora l'approssimazione di $f(x)$ vicino a x_0*

    $$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + R_2(x, x_0),$$

    col polinomio (2) di grado al piu' due ha un resto $R_2(x; x_0)$ che per x tendente a x_0 tende a zero piu' velocemente del quadrato dello scarto $x - x_0$:

    $$\frac{R_2(x, x_0)}{(x - x_0)^2} \to 0 \ \ per \ \ x \to x_0.$$

    Geometricamente, questo teorema si puo' esprimere nel modo seguente. Il grafico $y = p_2(x)$ del polinomio p_2 e' una parabola che vicino al punto $(x_0, f(x_0)$ approssima meglio della retta tangente il grafico $y = f(x)$ della funzione f; per ciascun segmento orientato "orizzontale" sull'asse delle ascisse avente primo estremo x_0 consideriamo la retta per il secondo estremo parallela all'asse delle ordinate, e su questa retta il segmento orientato "verticale" tagliato dalla parabola e dal grafico di f; allora la misura del segmento verticale tende a zero piu' velocemente del quadrato della misura del segmento orizzontale.

11. Il teorema di aprrossimazione del II ordine si puo' esprimere anche nella forma

Teorema 8 *(Approssimazione del II ordine) Sia f una funzione definita vicino a un punto x_0, derivabile due volte in x_0. Allora per h vicino a 0 si ha*

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2}h^2 + R_2(h; x_0),$$

dove

$$\frac{R_2(h; x_0)}{h^2} \to 0 \ \textit{ per } \ h \to 0.$$