Lezione del 24 ottobre

1. **Premessa**

   I fatti descritti nei punti seguenti si possono vedere come molto lontani sviluppi di alcuni fatti elementari riguardanti le funzioni polinomiali di II grado. Diamo per buono il fatto che ciascuna funzione polinomiale di II grado

   $$p(x) = ax^2 + bx + c \qquad (a \neq 0) \tag{1}$$

   ha per grafico una parabola con asse parallelo all'asse delle ordinate;

   -per $a > 0$ tale parabola ha concavita' rivolta verso l'alto, il suo vertice e' il suo punto di ordinata minima, e la parabola sta al di sopra di tutte le rette ad essa tangenti.

   -per $a < 0$ tale parabola ha concavita' rivolta verso il basso, il suo vertice e' il suo punto di ordinata massima, e la parabola sta al di sotto di tutte le rette ad essa tangenti.

   Gli sviluppi seguenti riguardano le funzioni derivabili due volte. Informalmente, lo studio di certi aspetti di queste funzioni si riconduce allo studio di certi aspetti delle funzioni polinomiali di II grado mediante approssimazioni del II ordine.

   Osserviamo che le derivate della funzione polinomiale (1) sono date da

   $$p'(x) = 2ax + b, \qquad p''(x) = 2a.$$

   In particolare, possiamo riscrivere la (1) come

   $$p(x) = p(0) + p'(0)x + \frac{p''(0)}{2}x^2;$$

   e piu' in generale, per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ si ha

   $$p(x) = p(0) + p'(0)(x - x_0) + \frac{p''(x_0)}{2}(x - x_0)^2$$

   (qui $p''(x)$ e' costante al variare di x, una volta si e' preferito scrivere $p''(0)$ e l'altra $p''(x_0)$). Cio' in particolare significa che esiste una ed una sola funzione polinomiale di grado al piu' due che in un dato punto ha un dato valore, una data derivata, ed una data derivata seconda.

   Data una funzione f derivabile due volte in un punto x_0, osserviamo che il polinomio di grado al piu' due

   $$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2$$

   che compare nella approssimazione del II ordine di f vicino a x_0 e' esattamente il polinomio che ha in x_0 lo stesso valore di f, la stessa derivata di f e la stessa derivata seconda di f.

2. **Massimi, minimi e derivata seconda**

   Per una funzione f definita in un intorno di un punto x_0 e derivabile in x_0, abbiamo enunciato e provato il teorema (di Fermat) secondo il quale se x_0 e' un punto di massimo o minimo locale per f, allora $f'(x_0) = 0$; se la funzione f e' derivabile due volte in x_0 allora si puo' dire qualcosa di piu'.

   Teorema 1 *Sia f una funzione definita in un intorno di un punto x_0, derivabile due volte in x_0. Allora*

   -se x_0 e' un punto di minimo locale per f, allora $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) \geq 0$;

   -se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0$, allora x_0 e' un punto di minimo locale per f.

   Analogamente,

   -se x_0 e' un punto di massimo locale per f, allora $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) \leq 0$;

   -se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) < 0$, allora x_0 e' un punto di massimo locale per f.

   Gli aspetti di questo teorema riguardanti la derivata seconda possono essere espressi come segue.

   Teorema 2 *(Criterio del II ordine) Per una funzione f derivabile due volte in un punto x_0, con $f'(x_0) = 0$, si ha*

   -se $f''(x_0) > 0$, allora x_0 e' un punto di minimo locale per f.

   -se $f''(x_0) < 0$, allora x_0 e' un punto di massimo locale per f.

   Nel caso in cui $f''(x_0) = 0$ puo' succedere che x_0 sia un punto di minimo, oppure ne' di minimo ne' di massimo, oppure di massimo, locale, come mostrato dai seguenti esempi.

   1- $f(x) = x^4$, $x_0 = 0$;

   2- $f(x) = x^3$, $x_0 = 0$;

   3- $f(x) = -x^4$, $x_0 = 0$.

3. Applicazione.

   E' data la funzione

   $$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 3x^4 + 16x^3 + 30x^2 + 24x + 7.$$

   Per ciascuno dei punti $0, -1, -2$ si dica se e' di minimo, massimo, o ne' minimo ne' massimo, locale per f.

   La funzione f essendo un polinomio e' derivabile su $\mathbb{R}$; la sua funzione derivata e'

   $$f'(x) = 12x^3 + 48x^2 + 60x + 24.$$

Si ha

$$f'(0) = 24, \quad f'(-1) = 0 \quad f'(-2) = 0$$

Per il teorema di Fermat, possiamo affermare che il punto 0 non e' ne' di minimo locale ne' di massimo locale per f.

La funzione f' essendo un polinomio e' derivabile su $\mathbb{R}$; la sua funzione derivata e'

$$f''(x) = (f')'(x) = 36x^2 + 96x + 60.$$

Si ha

$$f''(-1) = 0 \quad f''(-2) = 12.$$

Per il criterio del II ordine, possiamo affermare che -2 e' un punto di minimo locale per f. In base alle informazini ricavate, per il punto -1 non possiamo fare alcuna affermazione.

4. **Criterio del II ordine e approssimazine del II ordine**

Di seguito diamo un'idea informale di come il criterio del II ordine possa essere dedotto dall'approssimazione del II ordine.

Precisamente, data una funzione f definita in un intorno bilatero di un punto x_0, derivabile due volte in x_0, per x abbastanza vicino a x_0 si ha

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + R_2(x; x_0),$$

con

$$\frac{R_2(x; x_0)}{(x - x_0)^2} \to 0 \;\; per \;\; x \to x_0.$$

Se $f'(x_0) = 0$, si ha

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + R_2(x; x_0).$$

Ora, per x abbastanza vicino a x_0, il resto $R_2(x; x_0)$ e' trascurabile e la funzione $f(x)$ si comporta come il poliniomio di grado al piu' due

$$p_2(x) = f(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2.$$

Ora:

-per $f''(x_0) > 0$ si ha che $p_2(x)$ ha un punto di minimo in x_0;

-per $f''(x_0) < 0$ si ha che $p_2(x)$ ha un punto di massimo in x_0.

Lo stesso dovra' valere per $f(x)$ vicino ad x_0.

5. **Funzioni concave verso l'alto, verso il basso.**

Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione definita su un intervallo I, derivabile su tale intervallo con funzione derivata $f' : I \to \mathbb{R}$ continua. Per ogni $x_0 \in I$ sia

$$p_{x_0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad p_{x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

l'approssimazione del I ordine di f in x_0.

-Diciamo che " f e' concava verso l'alto su I " se e solo se f e' maggiore-uguale a ciascuna sua approssimazione del I ordine: per ogni $x_0 \in I$ si ha $f \geq p_{x_0}$, cioe'

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad \forall x \in I.$$

-Diciamo che " f e' concava verso il basso su I " se e solo se f e' minore-uguale a ciascuna sua approssimazione del I ordine: per ogni $x_0 \in I$ si ha $f \leq p_{x_0}$, cioe'

$$f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad \forall x \in I.$$

-Diciamo che " x_0 e' un punto di flesso per f " se e solo se f e' maggiore-uguale alle sue approssimazioni del I ordine nei punti di un intorno sinistro di x_0, e f e' minore-uguale alle sue approssimazioni del I ordine nei punti di un intorno destro di x_0, o viceversa.

Passando ai grafici, ad f corrisponde la linea $y = f(x)$, a ciascuna approssimazione del I ordine p_{x_0} corrisponde le retta tangente alla linea $y = f(x)$ nel suo punto $P_0 = (x_0, f(x_0))$, e si ha che

-f e' concava verso l'alto su I se e solo se la linea $y = f(x)$ sta al di sopra di ciascuna retta ad essa tangente;
-f e' concava verso il basso su I se e solo se la linea $y = f(x)$ sta al di sotto di ciascuna retta ad essa tangente;
-x_0 e' un punto di flesso per f se e solo se la linea $y = f(x)$ sta al di sopra delle rette ad essa tangenti in punti "a sinistra vicino a" P_0, e al di sotto delle rette ad essa tangenti in punti "a destra vicino a" P_0, o viceversa.

Per le funzioni derivabili due volte si ha la seguente caratterizzazione della concavita'.

Teorema 3 *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile due volte su un intervallo I. Allora*

-f e' concava verso l'alto su I se e solo se $f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in I$;

-f e' concava verso il basso su I se e solo se $f''(x) \leq 0$ per ogni $x \in I$.

-x_0 e' un punto di flesso per f se e solo se $f''(x) \leq 0$ o $f''(x) = 0$ o $f''(x) \geq 0$ per $x \leq x_0$ o $x = x_0$ o $x \geq x_0$ vicino a x_0, o viceversa.

6. Applicazione.

Consideriamo la funzione
$$f(x) = x^2 e^x.$$
Questa funzione e' definita e derivabile due volte su $\mathbb{R}$. Si ha
$$f(x) = x^2 e^x \to \begin{cases} +\infty & \text{per } x \to +\infty \\ 0^+ & \text{per } x \to -\infty \end{cases}$$
(lo si verifichi). La funzione derivata prima e' data da
$$f'(x) = x(x+2)e^x$$
il segno di $f'(x)$ e la crescenza/decrescenza di $f(x)$ sono descritti dalla tabella
$$\begin{array}{c|ccccc} x & & -2 & & 0 & \\ \textit{segno di } f'(x) & + & 0 & - & 0 & + \\ f(x) & \nearrow & & \searrow & & \nearrow \end{array}$$
Dunque la funzione f

- e' crescente su $]-\infty, -2]$

- ha un punto di massimo locale in -2, cui corrisponde il valore di massimo locale $f(-2) = 4e^{-2}$;

- e' decrescente su $[-2, 0]$

- ha un punto di minimo locale in 0, cui corrisponde il valore di minimo globale $f(0) = 0$

- e' crescente su $[0, +\infty[$

Si lascia al lettore di dare una rappresentazione del grafico di f coerente con queste informazioni. Una tale rappresentazione dovrebbe suggerire che la funzione dovrebbe avere concavita' rivolta

-verso l'alto in un intervallo $]-\infty, c]$,

-verso il basso in un intervallo $[c, d]$,

-e verso l'alto in un intervallo $[d, +\infty[$

con $c < -2$ e $-1 < d < 0$ punti di flesso. Si lascia al lettore verificare questa previsione usando il teorema del punto precedente.