**Lezione del 24 ottobre - II**

1. Consideriamo una funzione biiettiva $f : I \to J$ da un intervallo $I$ ad un intervallo $J$, e sia $f^{-1} : J \to I$ la sua funzione inversa. Supponiamo che $f$ sia derivabile su $I$ e che $f^{-1}$ sia derivabile su $J$; ci chiediamo quale relazione debba sussistere fra la funzione $f' : I \to \mathbb{R}$ e la funzione $\left(f^{-1}\right)' : J \to \mathbb{R}$.

   Per definizione di funzione inversa si ha
   $$f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_J$$
   dove $\mathrm{id}_J$ e' la funzione identita' su $J$, definita da $\mathrm{id}_J(x) = x$ per ogni $x \in J$. Dunque per ogni $x \in J$ si ha
   $$\left(f \circ f^{-1}\right)'(x) = (\mathrm{id}_J)'(x);$$
   ora: da una parte si ha
   $$(\mathrm{id}_J)'(x) = 1;$$
   dall'altra, per il teorema di derivazione delle funzioni composte si ha
   $$\left(f \circ f^{-1}\right)'(x) = f'\left(f^{-1}(x)\right)\left(f^{-1}\right)'(x).$$
   Dunque
   $$f'\left(f^{-1}(x)\right)\left(f^{-1}\right)'(x) = 1, \quad \textit{da cui} \quad \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}.$$
   Se le funzioni $f$ ed $f^{-1}$ vengono viste come espressioni in una varaibile, e la derivazione come un operatore su tali espresssioni, allora questa formula diviene
   $$\mathrm{D}f^{-1}(x) = \frac{1}{(\mathrm{D}f(x))_{x:=f^{-1}(x)}}.$$
   Esempi.

   1-Per $n$ intero positivo, consideriamo la funzione

   $]0,+\infty[\to]0,+\infty[ \quad x \mapsto x^n$

   e la sua funzione inversa

   $]0,+\infty[\to]0,+\infty[, \quad x \mapsto \sqrt[n]{x},$

   entrambe derivabili nel loro dominio (si noti che 0 non e' nel dominio di $\sqrt[n]{x}$). Si ha
   $$\mathrm{D}\sqrt[n]{x} = \frac{1}{(\mathrm{D}x^n)_{x:=\sqrt[n]{x}}} = \frac{1}{(nx^{n-1})_{x:=\sqrt[n]{x}}} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}};$$

vediamo dunque che la regola di derivazione delle radici discende, tramite la regola di derivazione della funzione inversa, dalla regola di derivazione delle potenze.

2-Consideriamo la funzione

$\mathbb{R} \to ]0, +\infty[ \quad x \mapsto e^x$

e la sua funzione inversa

$]0, +\infty[ \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \ln(x),$

entrambe derivabili nel loro dominio. Si ha

$$\mathrm{D}\ln(x) = \frac{1}{(\mathrm{D}e^x)_{x:=\ln(x)}} = \frac{1}{(e^x)_{x:=\ln(x)}} = \frac{1}{x};$$

vediamo dunque che la regola di derivazione del logaritmo discende, tramite la regola di derivazione della funzione inversa, dalla regola di derivazione dell'esponenziale.

3-Consideriamo la funzione

$\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[ \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \tan(x)$

e la sua funzione inversa

$\mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \quad x \mapsto \arctan(x),$

entrambe derivabili nel loro dominio. Si ha

$$\mathrm{D}\arctan(x) = \frac{1}{(\mathrm{D}\tan(x))_{x:=\arctan(x)}} = \frac{1}{\left(1+\tan^2(x)\right)_{x:=\arctan(x)}} = \frac{1}{1+x^2}.$$

2. Nel punto precedente abbiamo assunto che la funzione $f : I \to J$ sia invertibile, derivabile, e che la funzione inversa $f^{-1} : J \to I$ sia derivabile. In realta' si hanno dei risultati piu' fini, con meno ipotesi. Ne enunciamo uno solo.

**Teorema 1** *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile su un intervallo $I$, con $f'(x) > 0$ per ogni $x \in I$, oppure con $f'(x) < 0$ per ogni $x \in I$. Allora la funzione $f : I \to J$ (dove $J = f(I)$) e' invertibile, la funzione inversa $f^{-1} : J \to I$ e' derivabile, e*

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}, \qquad \forall x \in J.$$

Si osservi che l'ipotesi $f'(x) > 0$ per ogni $x \in I$, con $I$ intervallo assicura che la funzione $f$ sia strettamente crescente su $I$, cio' implica che $f$ sia iniettiva e cio' a sua volta implica che $f : I \to f(I)$ sia invertibile. Analoga considerazione per l'ipotesi $f'(x) < 0$ per ogni $x \in I$. La parte sostanziale del teorema consiste nell'affermazione che la funzione inversa sia derivabile.