Lezione del 10 novembre. Integrali

1. **Calcolo dell'area del "segmento di parabola" (Fermat)**

   Consideriamo la parte di piano P compresa fra: l'arco di parabola $y = x^2$ (con $0 \leq x \leq 1$), l'asse x, la retta $x = 1$.

   Per ogni $n = 1, 2, 3, \ldots$ possiamo "approssimare dal di sotto" l'insieme P con l'insieme P_n costruito nel modo seguente

   dividiamo l'intervallo $[0, 1]$ in n intervalli uguali,

   $$[0, 1/n],\ [1/n, 2/n],\ [2/n, 3/n],\ \ldots,\ [(n-1)/n, 1];$$

   ciascun sottointervallo e' la base di un rettangolo massimo contenuto in P;

   prendiamo P_n come l'insieme unione di questi n rettangoli.

   A questa approssimazione dal di sotto di P con P_n corrisponde un'approssimazione dal di sotto dell'area di P con l'area di P_n.

   Al tendere di n a $+\infty$, l'insieme P_n tende ad invadere l'insieme P, e l'area di P_n tende all'area di P.

   L'area di P_n e' la somma delle aree del primo, secondo, terzo, ..., $n-$mo rettangolo

   $$0\frac{1}{n} + \left(\frac{1}{n}\right)^2 \frac{1}{n} + \left(\frac{2}{n}\right)^2 \frac{1}{n} + \cdots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \\ = \frac{1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2}{n^3}.$$

   Si prova (non e' immediato) che

   $$1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}, \qquad \forall n = 1, 2, 3, \ldots.$$

   Dunque l'area di P_n e'

   $$\frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}.$$

   Passando al limite per $n \to +\infty$ si ha

   $$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(1-1/n)(2-1/n)}{6} = \frac{1 \cdot 2}{6} = \frac{1}{3},$$

   e questa e' l'area di P.

2. **Descrizione sintetica dei punti successivi**

   Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione definita su un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. Sotto la condizione $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in [a, b]$, si ha che il grafico di f, l'asse

x e le rette $x = a$ e $x = b$ delimitano una parte di piano, che si dice "trapezoide di f su $[a, b]$".

Nel caso generale, in cui f assume sia valori positivi che negativi,

-i punti del piano che stanno al di sotto del grafico di f, al di sopra dell'asse x, e nella fascia compresa fra le rette $x = a$ e $x = b$ formano una parte di piano, che si puo' dire "trapezoide positivo di f su $[a, b]$".

-i punti del piano che stanno al di sopra del grafico di f, al di sotto dell'asse x, e nella fascia compresa fra le rette $x = a$ e $x = b$ formano una parte di piano, che si puo' dire "trapezoide negativo di f su $[a, b]$".

Di seguito mostriamo come a ciascuna funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ di un'ampia classe di funzioni si possa associare un numero reale, detto "integrale (di Riemann) di f su $[a, b]$" ed indicato con

$$\int_a^b f(x)\, \mathrm{dx},$$

che per f non negativa dia l'area del trapezoide di f su $[a, b]$; in generale tale integrale dara' la differenza fra l'area del trapezoide positivo di f e l'area del trapezoide negativo di f.

Il punto di partenza e' il fatto che per certe funzioni non negative, quelle costanti a tratti, il trapezoide e' in realta' un'unione di rettangoli e quindi per tali funzioni l'integrale deve essere dato dalla somma dei prodotti delle basi per le corrispondenti altezze; tale formula si estende all'integrale di funzioni costanti a tratti qualsiasi. Le funzioni costanti a tratti vengono dette "funzioni a gradini".

Ciascuna funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ definita su un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ puo' essere approssimata dal di sotto e dal di sopra con funzioni a gradini, e cosi' si vengono a definire l'integrale inferiore e l'integrale superiore di f. Quando tali integrali coincidono, si dice che la funzione f e' integrabile su $[a, b]$ e il loro valore comune si dice integrale di f su $[a, b]$.

In realta' in questo modo si da una defінzione di area, che estende la definizione della geometria elementare.

Ogni funzione continua f e' integrabile, e il suo integrale puo' essere espresso come limite di una successione di somme, le "somme di Cauchy-Riemann" di f.

Questi punti vengono precisati e sviluppati di seguito.

3. **Suddivisioni di un intervallo**

   Diciamo "$n-$suddivisione di un intervallo $[a,b]$" una qualsiasi sequenza di $n+1$ punti
   $$(a=)\ a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{n-1} < a_n\ (=b),$$
   e diciamo che $[a_0, a_1[$, $[a_1, a_2[$, $\ldots$, $[a_{n-1}, a_n]$ sono il primo, secondo, ..., $n-$mo sottointervallo della $n-$suddivisione di $[a,b]$.

   Diciamo che una $n-$suddivisione di $[a,b]$ e' uniforme se gli $n+1$ punti sono equidistanziati, o che e' lo stesso se gli n sottointervalli hanno tutti la stessa ampiezza; in tal caso si ha
   $$a_i - a_{i-1} = \frac{b-a}{n},$$
   da cui
   $$a_1 = a + \frac{b-a}{n} = \frac{b+(n-1)a}{n}, \qquad a_2 = a_1 + \frac{b-a}{n} = \frac{2b+(n-2)a}{n},$$
   $$a_3 = a_2 + \frac{b-a}{n} = \frac{3b+(n-3)a}{n}, \qquad \ldots$$

4. **Funzioni a gradini**

   Una funzione $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ si dice "funzione a gradini" se e solo se esiste una suddivisione di $[a,b]$ tale che φ sia costante su ciscun sottointervallo.

   In altri termini, le funzioni a gradini su un intervallo $[a,b]$ sono tutte e sole le funzioni $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ del tipo
   $$\varphi(x) = \begin{cases} c_1 & \text{per } a_0 \le x < a_1 \\ c_2 & \text{per } a_1 \le x < a_2 \\ \vdots & \\ c_n & \text{per } a_{n-1} \le x \le a_n \end{cases}$$
   dove $a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{n-1} < a_n = b$ e' una suddivisione di $[a,b]$, e $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sono costanti in $\mathbb{R}$.

   Definiamo l'integrale di una tale funzione φ a gradini sull'intervallo $[a,b]$, ed indichiamo con $\int_a^b \varphi(x)\ \mathrm{dx}$ la somma dei valori assunti da φ sui vari sottointervalli, pesati con le ampiezze dei sottointervalli:
   $$\int_a^b \varphi(x)\ \mathrm{dx} = \sum_{i=1}^{n} c_i\,(a_i - a_{i-1})\,.$$

5. **Integrale di Riemann**

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata, nel senso che esistono due costanti m, M tali che $m \leq f(x) \leq M$, per ogni $x \in [a, b]$.

-L'estremo superiore degli integrali delle funzioni a gradini su $[a, b]$ che sono minori-uguali ad f si dice "integrale (di Riemann) inferiore di f su $[a, b]$" e si indica con $\underline{\int_a^b} f(x)\, \mathrm{dx}$; in simboli:

$$\underline{\int_a^b} f(x)\, \mathrm{dx} = \sup_{\varphi \leq f} \int_a^b \varphi(x)\, \mathrm{dx}$$

-L'estremo inferiore degli integrali delle funzioni a gradini su $[a, b]$ che sono maggiori-uguali ad f si dice "integrale (di Riemann) superiore di f su $[a, b]$" e si indica con $\overline{\int_a^b} f(x)\, \mathrm{dx}$; in simboli:

$$\overline{\int_a^b} f(x)\, \mathrm{dx} = \inf_{\varphi \geq f} \int_a^b \varphi(x)\, \mathrm{dx}$$

Osservazioni.

-Per ogni funzione a gradini $\varphi \leq f$ si ha che $\int_a^b \varphi(x)\, \mathrm{dx} \leq M(b-a)$; in altri termini, si ha che l'insieme degli integrali di queste funzioni a gradini e' superiormente limitato; per la proprieta' di completezza dei numeri reali, un tale insieme ha estremo superiore, dunque l'integrale inferiore e' ben definito.

-Analoghe considerazioni valgono per l'integrale superiore.

-L'integrale inferiore di f e' sempre minore-uguale all'integrale superiore di f:

$$\underline{\int_a^b} f(x)\, \mathrm{dx} \leq \overline{\int_a^b} f(x)\, \mathrm{dx}.$$

Definizione 1 *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Si dice che f e' integrabile (secondo Riemann) se e solo se l'integrale inferiore di f e l'integrale superiore di f coincidono, in tal caso il loro valore comune si dice integrale (di Riemann) di f e si indica con $\int_a^b f(x)\, dx$; si pone cioe'*

$$\underline{\int_a^b} f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx = \overline{\int_a^b} f(x)\, dx.$$

Si prova che

Teorema 1 *Se una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e' continua su $[a, b]$, allora e' integrabile su $[a, b]$.*

Esistono funzioni non integrabili secondo Riemann. [1]

6. **Integrale e operazioni algebriche**

   Siano $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ due funzioni integrabili definite su uno stesso intervallo $[a,b]$, e sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Si prova che anche la funzione $f+g : [a,b] \to \mathbb{R}$ e la funzione $\alpha f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sono integrabili, e

$$\int_a^b (f+g)(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x,$$
$$\int_a^b (\alpha f)(x)\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\mathrm{d}x;$$

   Se $f \leq g$ su $[a,b]$, allora

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

   Inoltre, per ogni $c \in [a,b]$ si ha

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

[1]Esempio di funzione non integrabile secondo Riemann.
Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{per } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Consideriamo una funzione a gradini $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \begin{cases} c_1 & \text{per } 0 \leq x < a_1 \\ c_2 & \text{per } a_1 \leq x < a_2 \\ \vdots & \\ c_n & \text{per } a_{n-1} \leq x \leq 1 \end{cases}$ tale che $\varphi(x) \leq f(x)$ per ogni $x \in [0,1]$; ora, in ogni sottointervallo esiste qualche numero irrazionale (in realta' infiniti), cioe' in ogni sottointervallo si ha $f(x) = 0$ per qualche x (in realta' infiniti), dunque $c_i \leq 0$, per ogni $i = 1, 2, \ldots, n$; da cio' segue $\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{dx} = \sum_{i=1}^n c_i(a_i - a_{i-1}) \leq 0$. Abbiamo provato che per ogni funzione a gradini φ su $[a,b]$ che sia minore-uguale ad f si ha $\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{dx} \leq 0$; da cio' segue

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{dx} = \sup_{\varphi \leq f} \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{dx} \leq 0.$$

In modo analogo si prova che per ogni funzione a gradini φ su $[a,b]$ che sia maggiore-uguale ad f si ha $\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{dx} \geq 1$; da cio' segue

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{dx} = \inf_{\varphi \geq f} \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{dx} \geq 1.$$

Dunque

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{dx} < \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{dx}.$$

7. Di seguito descriviamo come l'integrale di una funzione continua possa essere visto come limite di una successione di somme.

   Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Costruiamo una successione

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$$

   di funzioni a gradini $\varphi_i : [a, b] \to \mathbb{R}$ nel modo seguente.

   1- φ_1 e' una qualsiasi funzione costante su $[a, b]$, soggetta all'unica condizione che il suo valore costante sia uno dei valori assunti da f su $[a, b]$;

   2- φ_2 e' una qualsiasi funzione costante su ciascuno dei sottointervalli della $2-$suddivisione uniforme di $[a, b]$, soggetta all'unica condizione che il valore costante di φ_2 su ciascun sottointervallo sia uno dei valori assunti da f su quel sottointervallo.

   $\vdots$

   n- φ_n e' una qualsiasi funzione costante su ciascuno dei sottointervalli della $n-$suddivisione uniforme di $[a, b]$, soggetta all'unica condizione che il valore costante di φ_n su ciascun sottointervallo sia uno dei valori assunti da f su quel sottointervallo.

   $\vdots$

   Equivalentemente, in simboli:

   per ogni intero positivo n

   -consideriamo la $n-$suddivisione uniforme

$$a = a_{n0} < a_{n1} < a_{n2} < \ldots < a_{n,n-1} < a_{nn} = b, \qquad dove \quad a_{ni} = \frac{(n-i)a + ib}{n} \quad per \ \ i = 0, 1, \ldots, n$$

   dell'intervallo $[a, b]$

   -scegliamo n punti, $\xi_{n1}, \xi_{n2}, \ldots, \xi_{nn}$ uno in ciascun sottointervallo, nel senso che

$$a = a_{n0} \leq \xi_{n1} < a_{n1} \leq \xi_{n2} < a_{n2} < \ldots < a_{n,n-1} \leq \xi_{n,n} \leq a_{nn} = b,$$

   -definiamo la funzione a gradini $\varphi_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ ponendo

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} f(\xi_{n1}) & \text{per } a_{n0} \leq x < a_{n1} \\ f(\xi_{n2}) & \text{per } a_{n1} \leq x < a_{n2} \\ \vdots & \\ f(\xi_{nn}) & \text{per } a_{n,n-1} \leq x \leq a_{nn} \end{cases}$$

   Si prova che

la successione degli integrali su $[a, b]$ delle funzioni a gradini $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$ converge all'integrale di f su $[a, b]$:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \varphi_n(x)\, \mathrm{dx} \; = \; \int_a^b f(x)\, \mathrm{dx}.$$

Osserviamo che l'integrale della funzione a gradini φ_n e'

$$\int_a^b \varphi_n(x)\, \mathrm{dx} = \sum_{i=1}^n f(\xi_{ni})(a_{ni} - a_{n,i-1}) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(\xi_{ni})$$

L'espressione centrale viene detta "somma di Cauchy-Riemann della funzione f relativa alla suddivisione $a_{n,i}$ ($i = 0, 1, \ldots, n$) e ai punti intermedi $\xi_{n,i}$ ($i = 1, \ldots, n$).

Dunque possiamo scrivere

$$\int_a^b f(x)\, \mathrm{dx} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_{ni})(a_{ni} - a_{n,i-1})$$

oppure

$$\int_a^b f(x)\, \mathrm{dx} = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(\xi_{ni}),$$

e possiamo dire che l'integrale di f e' il limite di una qualsiasi successione di somme di Cauchy-Riemann di f.

8. **Teorema fondamentale del calcolo integrale**

Definizione 2 *Si dice che una funzione $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ e' una primitiva di una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ se e solo se*

$$F'(x) = f(x), \qquad \forall x \in [a, b].$$

Esempio. Per la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, una primitiva e' data dalla funzione $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3}{3}$.

Siamo ora in una posizione per stabilire il I teorema fondamentale del calcolo integrale:

Teorema 2 *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua, e sia $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ una primitiva di f su $[a, b]$. Allora*

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

9. **Calcolo dell'area del segmento di parabola. II**

   Essendo $F(x) = \frac{x^3}{3}$ una primitiva di $f(x) = x^2$, dal I teorema fondamentale delcalcolo integrale si ha

$$\int_0^1 x^2 \, \mathrm{dx} = \left(\frac{x^3}{3}\right)_{x=1} - \left(\frac{x^3}{3}\right)_{x=0} = \frac{1}{3}.$$

10. Dimostrazione del Teorema.

    Possiamo esprimere l'integrale di f come limite di una qualsiasi successione di somme di Cauchy-Riemann di f; consideriamo l'ennesima di tali somme

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_{ni})(a_{ni} - a_{n,i-1});$$

essendo F una primitiva di f questa somma si puo' scrivere come

$$\sum_{i=1}^{n} F'(\xi_{ni})(a_{ni} - a_{n,i-1});$$

ora, per ogni $i = 1, 2, \ldots, n$ si ha che la funzione F soddisfa le ipotesi del teorema del valor medio sull'intervallo $[a_{n,i-1}, a_{ni}]$, dunque possiamo scegliere $\xi_{ni} \in]a_{n,i-1}, a_{ni}[$ in modo che

$$F'(\xi_{ni}) = \frac{F(a_{ni}) - F(a_{n,i-1})}{a_{ni} - a_{n,i-1}};$$

l'ennesima somma di Cauchy-Riemann diviene allora

$$\sum_{i=1}^{n} \left(F(a_{ni}) - F(a_{n,i-1})\right)$$

e questa somma e'

$$F(a_{n1}) - F(a_{n0}) + F(a_{n2}) - F(a_{n1}) + F(a_{n3}) - F(a_{n2}) + \\ + \ldots + F(a_{nn}) - F(a_{n,n-1})$$

che a sua volta si semplifica a

$$F(b) - F(a).$$

Infine si ha

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) \, \mathrm{dx} &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_{ni})(a_{ni} - a_{n,i-1}) \\ &= \lim_{n\to+\infty} (F(b) - F(a)) = F(b) - F(a). \end{aligned}$$