Lezione del 12 novembre. Integrali

1. **Primitive**

Ricordiamo, e nello stesso ampliamo un poco, la definizione di funzione primitiva di una funzione.

Sia data una funzione $f : J \to \mathbb{R}$ (con J intervallo non ridotto a un punto, o unione di tali intervalli). Si dice che una funzione $F : J \to \mathbb{R}$ derivabile su J e' una primitiva di f se e solo se

$$F'(x) = f(x), \qquad \forall x \in J.$$

Esempio. Sia

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

la funzione costante uguale a 0. Osserviamo che ogni funzione

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F(x) = c \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

con c costante in $\mathbb{R}$ e' una primitiva di f. Vale il viceversa, cioe' ogni primitiva di f e' una funzione costante su $\mathbb{R}$.

Un poco piu' in generale si ha

Proposizione 1 *Sia data una funzione $F : I \to \mathbb{R}$ derivabile su un intervallo I. Se $F'(x) = 0$ per ogni $x \in I$, allora F e' una funzione costante su $\mathbb{R}$.*

Osserviamo che se si toglie l'ipotesi che I sia un intervallo allora la proposizione diventa falsa. Una funzione definita su un unione di intervalli, derivabile con derivata nulla in ogni punto del suo dominio, puo' non essere costante; ad esempio e' dato dalla funzione $f : (\mathbb{R} - \{0\}) \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{per } x < 0 \\ 1 & \text{per } x > 0 \end{cases}$$

Dimostrazione della Proposizione. Siano $x_1, x_2 \in I$; essendo I un intervallo, si ha $[x_1, x_2] \subseteq I$. Si ha

$$F(x_2) = F(x_1) + \frac{F(x_2) - F(x_1)}{x_2 - x_1}(x_2 - x_1).$$

La funzione F soddisfa le ipotesi del teorema del valor medio su $[x_1, x_2]$, dunque esiste un $\xi \in]x_1, x_2[$ tale che

$$F'(\xi) = \frac{F(x_2) - F(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Essendo $F'(x) = 0$ per ogni $x \in I$, ed essendo $\xi \in]x_1, x_2[\subseteq I$ si ha $F'(\xi) = 0$; dunque
$$F(x_2) = F(x_1) + 0 \cdot (x_2 - x_1) = F(x_1).$$
Abbiamo provato che per ogni $x_1, x_2 \in I$ si ha $F(x_2) = F(x_1)$, cioe' F e' costante su I.

2. D'ora in poi ci limiteremo salvo avviso contrario a considerare funzioni definite su intervalli non ridotti a un punto, o unioni di tali intervalli. Una volta nota una primitiva di una funzione, in un certo senso sono note tulle le sue primitive, precisamente:

   Proposizione 2 *Sia data una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ definita su un intervallo I. Se $F_0 : I \to \mathbb{R}$ e' una primitiva di f, allora le primitive di f sono tutte e sole le funzioni del tipo*
   $$F = F_0 + c,$$
   dove c e' una funzione costante su $\mathbb{R}$.

   Esempio. Una primitive della funzione $x \mapsto x$ e' la funzione $x \mapsto \frac{x^2}{2}$, dunque le primitive della funzione $x \mapsto x$ sono tutte e sole le funzioni
   $$x \mapsto \frac{x^2}{2} + c, \qquad (c \in \mathbb{R}).$$

   Dimostrazione della Proposizione. Da una parte, per ogni costante $c \in \mathbb{R}$ si ha
   $$(F_0 + c)' = F_0' + c' = f + 0 = f,$$
   dunque anche la funzione $F_0 + c : I \to \mathbb{R}$ e' una primitiva di f.

   Dall'altra parte, se $F : I \to \mathbb{R}$ e' una primitiva di f, allora
   $$(F - F_0)' = F' - F_0' = f - f = 0.$$
   Per la Proposizione al punto precedente, esiste una costante $c \in \mathbb{R}$ tale che $F - F_0 = c$, cioe' $F = F_0 + c$.

3. **Integrale Indefinito**

   Per il I teorema fondamentale, il calcolo dell'integrale
   $$\int_a^b f(x) \mathrm{d}x$$
   di una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua su un intervallo $[a, b]$, puo' essere ricondotto alla determinazione di una funzione $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ primitiva di f su $[a, b]$, in quanto
   $$\int_a^b f(x) \mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Al posto di $F(b) - F(a)$ si usa scrivere $[F(x)]_a^b$, cosi'

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b.$$

Definizione 1 *Sia data una funzione $f : I \to \mathbb{R}$, con I intervallo; l'insieme di tutte le funzioni $I \to \mathbb{R}$ primitive di f su I viene detto integrale indefinito di f su I, e viene indicato con*

$$\int f(x)dx.$$

Per i punti precedenti, se $F : A \to \mathbb{R}$ e' una primitiva di f su A, allora l'insieme $\int f(x)$ dx coincide con l'insieme delle funzioni del tipo $F + c$, dove $c \in \mathbb{R}$; si usa scrivere

$$\int f(x)\ \mathrm{dx} = F(x) + c, \qquad (c \in \mathbb{R})$$

e spesso, per brevita', ci si limita a scrivere

$$\int f(x)\ \mathrm{dx} = F(x).$$

Esempio. Si ha

$$\int x\ \mathrm{dx} = \frac{x^2}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R};$$

in breve, si scrive

$$\int x\ \mathrm{dx} = \frac{x^2}{2}.$$

Alcuni integrali indefiniti elementari:

$$\int x^\alpha \mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \qquad (\alpha \neq -1)$$

$$\int x^{-1}\mathrm{d}x = \log|x|$$

$$\int e^x \mathrm{d}x = e^x$$

$$\int \sin(x)\mathrm{d}x = -\cos(x)$$

$$\int \cos(x)\mathrm{d}x = \sin(x)$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan(x)$$

4. **Prime regole di integrazione**

   Alle relazioni fra derivazione e operazioni algebriche
$$(f(x)+g(x))' = (f(x))' + (g(x))',$$
$$(\alpha f(x))' = \alpha\,(f(x))',$$
   corrispondono le seguenti relazioni fra integrazione e operazioni algebriche
$$\int (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x,$$
$$\int \alpha f(x)\mathrm{d}x = \alpha \int f(x)\mathrm{d}x, \qquad (\alpha \in \mathbb{R}).$$
   In particolare, per una funzione polinomiale si avra'
$$\begin{aligned}\int \left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n\right)\ \mathrm{dx} \\ &= \int a_0\ \mathrm{dx} + \int a_1x\ \mathrm{dx} + \int a_2x^2\ \mathrm{dx} + \cdots + \int a_nx^n\ \mathrm{dx} \\ &= a_0\int 1\ \mathrm{dx} + a_1\int x\ \mathrm{dx} + a_2\int x^2\ \mathrm{dx} + \cdots + a_n\int x^n\ \mathrm{dx} \\ &= a_0x + a_1\frac{x^2}{2} + a_2\frac{x^3}{3} + \cdots + a_n\frac{x^{n+1}}{n+1}\end{aligned}$$

5. Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$. Questa funzione e' continua (anzi derivabile, una, due, ... un numero qualsiasi di volte) sul suo dominio. Si ha
$$\int xe^{-\frac{x^2}{2}}\ \mathrm{dx} = -e^{-\frac{x^2}{2}};$$
   infatti
$$D\left(-e^{-\frac{x^2}{2}}\right) = -e^{-\frac{x^2}{2}}D\left(-\frac{x^2}{2}\right) = -e^{-\frac{x^2}{2}}(-x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}.$$
   Lo studio della funzione f e' stato assegnato nella prova parziale; cfr studio e rappresentazione del grafico di f in questo sito.

   Segno della funzione f : $f(x) < 0$ per $x < 0$; $f(x) = 0$ per $x = 0$; $f(x) > 0$ per $x > 0$; inoltre f e' dispari.

   Si ha:
$$\int_0^1 xe^{-\frac{x^2}{2}}\ \mathrm{dx} = \left[-e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_0^1 = -e^{-\frac{1}{2}} + 1, \tag{1}$$
   questa e' l'area del trapezoide di f su $[0,1]$;

$$\int_{-1}^{1} xe^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{dx} = \left[-e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_{-1}^{1} = -e^{-\frac{1}{2}} + e^{-\frac{1}{2}} = 0, \tag{2}$$

questa e' la differenza fra l'area del trapezoide positivo di f su $[-1, 1]$ e l'area del trapezoide negativo di f su $[-1, 1]$; il fatto che questa differenza sia nulla, cioe' che i due trapezoidi abbiano la stessa area, si puo' dederre anche dal fatto che la funzione e' dispari e l'intervallo $[-1, 1]$ e' simmetrico rispetto a 0.

Per ogni $b \geq 0$,

$$\int_{0}^{b} xe^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{dx} = \left[-e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_{0}^{b} = -e^{-\frac{1}{b}} + 1, \tag{3}$$

e questa e' l'area del trapezoide di f su $[0, b]$.

$$\lim_{b\to+\infty} \int_{0}^{b} xe^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{dx} = \lim_{b\to+\infty} \left[-e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_{0}^{b} = \lim_{b\to+\infty} \left(-e^{-\frac{1}{b}} + 1\right) = 1; \tag{4}$$

questa puo' essere interpretata come l'area del trapezoide di f su $[0, +\infty[$.