Lezione del 14 novembre. Integrali

1. Di seguito, consideriamo primitive e integrali indefiniti di funzioni definite su intervalli. Nella prossima lezione vedremo che esiste qualche funzione che non possiede primitive, ma tutte le funzioni contimue posseggono primitive. Per semplicita' di seguito ci limitiamo a considerare funzioni continue, anzi, affinche' abbiano senso tutte le formule seguenti, ci limitiamo a considerare funzioni derivabili con funzione derivata continua. [1]

2. **Composizione di funzioni, derivazione e integrazione.**
   Alla regola di derivazione per le funzioni composte $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$ corrisponde la regola di integrazione
   $$\int f'(g(x))g'(x)\mathrm{dx} = f(g(x)).$$
   In particolare, si ha
   $$\int e^{g(x)}g'(x)\mathrm{dx} = e^{g(x)},$$
   $$\int \frac{g'(x)}{g(x)}\mathrm{dx} = \ln|g(x)|.$$
   $$\int \cos(g(x))g'(x)\mathrm{dx} = \sin(g(x)),$$
   $$\int \sin(g(x))g'(x)\mathrm{dx} = -\cos(g(x))$$
   Esempi.
   $$\int e^{x^2}x\mathrm{dx} = \frac{1}{2}\int e^{x^2}2x\mathrm{dx} = \frac{1}{2}e^{x^2}$$
   $$\int e^{5x^3}7x^2\mathrm{dx} = \frac{7}{15}\int e^{5x^3}15x^2\mathrm{dx} = \frac{7}{15}e^{5x^3}$$
   $$\int \frac{1}{2x+3}\mathrm{dx} = \frac{1}{2}\int \frac{2}{2x+3}\mathrm{dx} = \frac{1}{2}\ln|2x+3|$$
   $$\int \frac{6x+5}{3x^2+5x+7}\mathrm{dx} = \ln|3x^2+5x+7|$$
   $$\int \tan x\mathrm{dx} = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\mathrm{dx} = -\int \frac{-\sin(x)}{\cos(x)}\mathrm{dx} = -\ln|\cos x|$$
   $$\int \cos(x^{-1})x^{-2}\mathrm{dx} = -\int \cos(x^{-1})(-x^{-2})\mathrm{dx} = -\sin(x^{-1})$$

[1] Un esempio di una funzione derivabile su $\mathbb{R}$ ma con funzione derivata non continua su $\mathbb{R}$ (perche' non continua in 0):
$$f(x) = \begin{cases} x^2\sin(x^{-1}) & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$
La verifica e' lasciata al lettore.

3. Ragionando come nel terzo esempio del punto precedente si possono integrare tutte le frazioni algebriche con numeratore costante e denominatore di grado 1; precisamente si ha

$$\int \frac{a}{bx+c}\mathrm{dx} = \frac{a}{b}\ln|bx+c|$$

Con un passo di raccordo, in modo simile si possono integrare tutte le frazioni algebriche con numeratore e denominatore di grado 1.

Ad esempio, consideriamo

$$\int \frac{4x+5}{2x+3}\mathrm{dx};$$

osserviamo che

$$\frac{4x+5}{2x+3} = \frac{4x+6-1}{2x+3} = 2 - \frac{1}{2x+3};$$

dunque per l'integrale di sopra si ha

$$= \int \left(2 - \frac{1}{2x+3}\right)\mathrm{dx} = 2\int \mathrm{dx} - \int \frac{1}{2x+3}\mathrm{dx} = 2x - \frac{1}{2}\ln|2x+3|.$$

L'integrale notevole

$$\int \frac{1}{x^2+1}\mathrm{dx} = \arctan(x)$$

si puo' usare per integrare tutte le frazioni algebriche con numeratore costante e denominatore di grado 2 privo di radci reali. [2] Questi sono i primissimi passi che portano ad un medodo di integrazione per tutte le frazioni algebriche.

---

[2] Ad esempio, consideriamo

$$\int \frac{1}{x^2+x+3}\mathrm{dx};$$

osserviamo che

$$\frac{1}{x^2+2x+3} = \frac{1}{(x+1)^2+2} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{(x+1)^2}{2}+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1};$$

dunque per l'integrale di sopra si ha

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\mathrm{dx} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right).$$

4. **Integrazione per parti**

Alla relazione fra derivazione e prodotto

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

corrisponde la seguente relazione fra integrazione e prodotto

$$\int \left(f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\right) \mathrm{d}x = f(x)g(x),$$

cioe'

$$\int f'(x)g(x)\mathrm{d}x + \int f(x)g'(x)\mathrm{d}x = f(x)g(x),$$

che puo' essere riscritta

$$\int f'(x)g(x)\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\mathrm{d}x,$$

o

$$\int f(x)g'(x)\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

Questa formula viene detta formula di integrazione per parti. L'uso tipico e' il seguente. Si vuole integrare una funzione $h(x)$; per ogni scrittura di $h(x)$ del tipo $h(x) = f'(x)g(x)$, la formula permette di ricondurre l'integrazione di $h(x)$ all'integrazione della funzione $f(x)g'(x)$; l'applicazione della formula ha successo se quest'ultima funzione e' piu' facile da integrare della prima.

Esempio. Si vuole calcolare l'integrale

$$\int xe^x \mathrm{d}x.$$

Tentativo 1.

$$\int \underbrace{x}_{\mathrm{f}'} \underbrace{e^x}_{\mathrm{g}} \mathrm{d}x = \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{\mathrm{f}} \underbrace{e^x}_{\mathrm{g}} - \int \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{\mathrm{f}} \underbrace{e^x}_{\mathrm{g}'} \mathrm{d}x;$$

con i metodi e i fatti finora disponibili non sappiamo integrare la funzione $\frac{x^2}{2}e^x$, il tentativo non ha avuto successo.

Tentativo 2.

$$\begin{aligned}\int \underbrace{x}_{\mathrm{f}} \underbrace{e^x}_{\mathrm{g}'} \mathrm{d}x &= \underbrace{x}_{\mathrm{f}} \underbrace{e^x}_{\mathrm{g}} - \int \underbrace{1}_{\mathrm{f}'} \underbrace{e^x}_{\mathrm{g}} \mathrm{d}x \\ &= xe^x - e^x = (x-1)e^x.\end{aligned}$$

Esempio. Si vuole calcolare l'integrale

$$\int x^2e^x \mathrm{d}x.$$

Tentativo.

$$\int \underbrace{x^2}_{\mathrm{f}} \underbrace{e^x}_{\mathrm{g'}} \mathrm{d}x = \underbrace{x^2}_{\mathrm{f}} \underbrace{e^x}_{\mathrm{g}} - \int \underbrace{2x}_{\mathrm{f'}} \underbrace{e^x}_{\mathrm{g}} \mathrm{d}x$$
$$= x^2 e^x - 2(x-1)e^x = (x^2 - 2x + 2)e^x.$$

Esempio. Si vuole calcolare l'integrale

$$\int \log x \, \mathrm{d}x.$$

Tentativo.

$$\int \underbrace{1}_{\mathrm{f'}} \underbrace{\log x}_{\mathrm{g}} \, \mathrm{d}x = \underbrace{x}_{\mathrm{f}} \underbrace{\log x}_{\mathrm{g}} - \int \underbrace{x}_{\mathrm{f}} \underbrace{\frac{1}{x}}_{\mathrm{g'}} \, \mathrm{d}x$$
$$= x \log x - x = x(\log x - 1).$$

5. **Integrazione per sostituzione**

Il comportamento dell'integrale rispetto alla sostituzione di variabili puo' essere descritto nel modo seguente.

Sia $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ una funzione continua, e sia $x = g(u)$ una sostituzione di variabile, dove $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile con funzione derivata continua, tale che $g(a) = \alpha$, $g(b) = \beta$.

Si prova che le seguenti trasformazioni

1-dalla funzione $f(x)$ alla funzione $f(g(u))$;

2-da $\mathrm{d}x$ a $\mathrm{d}g(u) = g'(u)\mathrm{d}u$;

3-dagli estremi di integrazione $x = \alpha$ e $x = \beta$ agli estremi di integrazione $u = a$ e $u = b$

lasciano invariato l'integrale. In altri termini:

$$\int_\alpha^\beta f(x) \, \mathrm{dx} = \int_a^b f(g(u))g'(u) \, \mathrm{du}$$

Questo fatto puo' essere usato per semplificare il problema del calcolo di un integrale.

Esempio. Consideriamo l'integrale

$$\int_0^4 \sin \sqrt{x} \, \mathrm{dx};$$

consideriamo la sostituzione di variabile $x = g(u)$ dove $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(u) = u^2$; la funzione g e' derivabile con funzione derivata continua, e $g(0) = 0$, $g(2) = 4$; dunque si ha

$$\int_0^4 \sin \sqrt{x} \, \mathrm{dx} = \int_0^2 \sin(u) 2u \, \mathrm{du};$$

quest'ultimo integrale puo' essere calcolato per parti.

6. **Integrali Generalizzati**

Definizione 1 *Sia* $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$*, continua; diciamo che esiste l'integrale di* f *su* $[a, +\infty[$ *se esiste (finito o infinito) il limite dell'integrale di* f *su* $[a, b]$ *per* $b \to +\infty$*, e in tal caso poniamo*

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

Sia $f :]-\infty, b] \to \mathbb{R}$*, continua. diciamo che esiste l'integrale di* f *su* $]-\infty, b]$ *se esiste (finito o infinito) il limite dell'integrale di* f *su* $[a, b]$ *per* $a \to -\infty$*, e in tal caso poniamo*

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

Se $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ e' una funzione non negativa, si definisce l'area della regione di piano compresa fra il grafico di f, l'asse x, e la retta $x = a$, come il valore dell'integrale $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ di f su $[a, +\infty[$ (essendo f non negativa questo integrale esiste sempre, finito o infinito). Analogamente si definiscono le aree associate a funzioni non negative $]-\infty, b] \to \mathbb{R}$.

Esempi.

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x &= \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x \\
&= \lim_{b \to +\infty} \left(\left[-\frac{1}{x} \right]_b - \left[-\frac{1}{x} \right]_1 \right) \\
&= \lim_{b \to +\infty} \left(-\frac{1}{b} + 1 \right) = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\mathrm{d}x &= \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{1}{x}\mathrm{d}x \\
&= \lim_{b \to +\infty} \left([\log x]_b - [\log x]_1 \right) \\
&= \lim_{b \to +\infty} \log b = +\infty.
\end{aligned}$$

Definizione 2 *Sia* $f :]c, b] \to \mathbb{R}$*, continua; diciamo che esiste l'integrale di* f *su* $]c, b]$ *se esiste (finito o infinito) il limite dell'integrale di* f *su* $]a, b]$ *per* $a \to c^+$*, e in tal caso poniamo*

$$\int_c^b f(x)dx = \lim_{a \to c^+} \int_a^b f(x)dx.$$

Sia $f : [a, c[\to \mathbb{R}$, continua. diciamo che esiste l'integrale di f su $[a, c[$ se esiste (finito o infinito) il limite dell'integrale di f su $[a, b]$ per $b \to c^-$, e in tal caso poniamo

$$\int_a^c f(x)dx = \lim_{b\to c^-} \int_a^b f(x)dx.$$

Se $f :]c, b] \to \mathbb{R}$ e' una funzione non negativa, si definisce l'area della regione di piano compresa fra il grafico di f, l'asse x, e le rette $x = c$ e $x = b$, come il valore dell'integrale $\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$ di f su $]c, b[$ (essendo f non negativa questo integrale esiste sempre, finito o infinito). Analogamente si definiscono le aree associate a funzioni non negative $[a, c[\to \mathbb{R}$.

Esempio.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x &= \lim_{a\to 0^+} \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x \\ &= \lim_{a\to 0^+} \left[2\sqrt{x}\right]_a^1 \\ &= \lim_{a\to 0^+} \left(2 - 2\sqrt{a}\right) = 2.\end{aligned}$$