Lezione del 17 novembre. Integrali

1. Abbiamo definito la nozione di integrale inferiore e superiore, e la nozione di integrabilita' e di integrale, per funzioni limitate su un intervallo chiuso e limitato. Abbiamo visto un esempio di una funzione non integrabile, e abbiamo enunciato che tutte le funzioni continue su un intervallo chiuso e limitato sono integrabili. In questo enunciato e' implicito che tutte le funzioni continue su un intervallo chiuso e limitato sono limitate. In realta' si puo' dire di piu'.

   Teorema 1 *(Weierstrass) Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e' una funzione continua, allora f possiede minimo e massimo globale su $[a,b]$; in altri termini esistono $x_*, x^* \in [a,b]$ tali che*
   $$f(x_*) \leq f(x) \leq f(x^*), \qquad \forall x \in [a,b].$$

   Non e' detto che x_* e x^* siano unici; ad esempio, se f e' costante allora x_* e x^* possono essere presi come due punti qualsiasi in $[a,b]$.

   Osserviamo che se si toglie una delle due ipotesi, l'enunciato diventa falso. Infatti:

   1- Esistono funzioni definite su un intervallo chiuso e limitato che non hanno massimo globale. Diamo due esempi.

   Uno in cui la funzione non e' superiormente limitata:
   $$f : [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases};$$

   uno in cui la funzione e' superiormente limitata:
   $$g : [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} 2-x & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}.$$

   2- Esistono funzioni continue definite su un intervallo che non hanno massimo globale. Quattro esempi:
   $$h :]0,1] \to \mathbb{R}, \quad h(x) = \frac{1}{x}; \qquad i :]0,1] \to \mathbb{R}, \quad i(x) = 2-x;$$
   $$j : [0,+\infty[\to \mathbb{R}, \quad j(x) = x; \qquad k : [1,+\infty[\to \mathbb{R}, \quad k(x) = \frac{x}{x+1}.$$

2. **Funzioni discontinue integrabili**

   Nello sviluppo della definizione di integrale per una funzione limitata su un intervallo chiuso e limitato, prima abbiamo definito l'integrale di una funzione a gradini φ (come somma dei valori assunti da φ pesati con le ampiezze dei corrispondenti sottointervalli), poi abbiamo definito l'integrabilita' e in caso affermativo l'integrale di una funzione f, come valore comune all'integrale inferiore di f (l'estremo superiore degli integrali delle funzioni a gradini minori-uguali ad f) e all'integrale superiore di f (l'estremo inferiore degli integrali delle funzioni a gradini maggiori-uguali ad f) .

Si prova che questa definizione e' coerente, nel senso che: ciascuna funzione a gradini e' integrabile, e il suo integrale come somma dei valori assunti pesati con le ampiezze dei corrispondenti sottointervalli coincide con il suo integrale come valore comune del suo integrale inferiore e del suo integrale superiore.

Le funzioni a gradini forniscono dunque esempi di funzioni integrabili discontinue.

Le funzioni a gradini sono funzioni costanti a tratti; piu' in gernerale diciamo che una funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e' continua a tratti su $[a,b]$ se esiste una suddivisione $a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n = b$ di $[a,b]$ tale che ciascuna delle funzioni

$$f_i :]a_{i-1}, a_i[\to \mathbb{R}, \qquad f_i(x) = f(x) \quad \forall x \in]a_{i-1}, a_i[$$

sia continua. Si prova che

Proposizione 1 *Se una funzione limitata su un intervallo chiuso e limitato e' continua a tratti, allora e' integrabile.*

3. **Media integrale**

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile. Il numero reale μ dato dal quoziente dell'integrale di f su $[a,b]$ sull'ampiezza dell'intervallo $[a,b]$ e' detto "media integrale della funzione f sull'intervallo $[a,b]$"; in simboli, si ha

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, \mathrm{dx};$$

equivalentemente, la media integrale della funzione f sull'intervallo $[a,b]$ e' il valore μ della funzione costante che ha lo stesso integrale di f su $[a,b]$; in simboli:

$$\mu(b-a) = \int_a^b f(x)\, \mathrm{dx}.$$

In particolare, nel caso in cui f sia una funzione non negativa, μ puo' essere vista come l'altezza del rettangolo di base il segmento $[a,b]$ che ha la stessa area del trapezoide di f su $[a,b]$.

Per le funzioni continue si ha il

Teorema 2 *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e' una funzione continua, allora la media integrale di f su $[a,b]$ e' uguale ad uno dei valori assunti da f su $]a,b[$; in altri termini, esiste una $\xi \in]a,b[$ tale che*

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx.$$

Osserviamo che se si toglie l'ipotesi della continuita' della funzione, allora l'enunciato diventa falso. Ad esempio, per la funzione

$$f : [-1,1] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} -3 & \text{per } -1 \leq x < 0 \\ 3 & \text{per } \ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

si ha

$$\mu = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} f(x)\ \mathrm{dx} = \frac{1}{2}(-3 \cdot 1 + 3 \cdot 1) = 0$$

ma $f(x) \neq 0$ per ogni $x \in [-1,1]$.

4. **Convenzione**

   Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione definita su un intervallo I; abbiamo indicato l'integrale di f su un intervallo $[a,b] \subseteq I$ (quando esiste) col simbolo $\int_a^b f(x)\ \mathrm{dx}$; poniamo

$$\int_b^a f(x)\ \mathrm{dx} = -\int_a^b f(x)\ \mathrm{dx}.$$

   Con questa convenzione, si ha

$$\int_p^q f(x)\ \mathrm{dx} + \int_q^r f(x)\ \mathrm{dx} = \int_p^r f(x)\ \mathrm{dx}$$

   per ogni $p, q, r \in I$, indipendentemente dalla loro posizione relativa.

   Osservazione. Se f e' una funzione continua su I ed F e' una primitiva di f su I, allora per il I teorema fondamentale del calcolo per ogni $p, q \in I$ con $p \leq q$ si ha

$$\int_p^q f(x)\ \mathrm{dx} = F(q) - F(p);$$

   questa uguaglinza vale anche nel caso in cui $p \geq q$; infatti in tal caso si ha $\int_p^q f(x)\ \mathrm{dx} = -\int_q^p f(x)\ \mathrm{dx} = -(F(p) - F(q)) = F(q) - F(p)$.

5. **Funzione integrale**

   Sia f una funzione definita su un intervallo I, integrabile su ogni intervallo chiuso e limitato contenuto in I, e sia c un punto fissato in I. Per le ipotesi fatte, per ogni $x \in I$ esiste $\int_c^x f(t)\ \mathrm{dt}$; si ha dunque una funzione $x \mapsto \int_c^x f(t)\ \mathrm{dt}$ definita sull'intervallo I a valori in $\mathbb{R}$; questa funzione viene detta "funzione integrale di f con punto base c", e viene indicata con $I_{f;c}$. Quindi si ha

$$I_{f;c} : I \to \mathbb{R}, \qquad I_{f;c}(x) = \int_c^x f(t)\ \mathrm{dt}.$$

   Osservazione. Il cambiamento del punto base ha come effetto sulla funzione integrale l'aggiunta di una costante; infatti scelto un altro punto base d in I si ha

$$I_{f;d}(x) = \int_d^x f(t)\ \mathrm{dt} = \int_d^c f(t)\ \mathrm{dt} + \int_c^x f(t)\ \mathrm{dt} = I_{f;d}(c) + I_{f;c}(x),$$

per ogni x in I.

Esempi.

1- Sia

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\qquad f(x)=\begin{cases}-1 & \text{per } x<0\\ 0 & \text{per } x=0\\ 1 & \text{per } x>0\end{cases}.$$

La funzione f e' costante a tratti su $\mathbb{R}$, dunque e' integrabile su ogni intervallo chiuso e limitato. Sia $c=0$.

-Per $x\geq 0$ si ha

$$\int_0^x f(t)\ \mathrm{dt}=\int_0^x 1\ \ \mathrm{dt}=[t]_0^x=x-0=x;$$

-per $x\leq 0$ si ha

$$\int_0^x f(t)\ \mathrm{dt}=\int_0^x (-1)\ \ \mathrm{dt}=[-t]_0^x=-x+0=-x;$$

Dunque

$$I_{f;0}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\qquad I_{f;0}(x)=\left\{\begin{array}{rl} x & \text{per } x\geq 0\\ -x & \text{per } x\leq 0\end{array}\right\}=|x|.$$

Si osservi che f non e' continua in 0, e $I_{f;0}$ e' continua (ma non derivabile) in 0.

2- Sia

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\qquad f(x)=|x|.$$

La funzione f e' continua su $\mathbb{R}$, dunque e' integrabile su ogni intervallo chiuso e limitato. Sia $c=0$;

-per $x\geq 0$ si ha

$$\int_0^x f(t)\ \mathrm{dt}=\int_0^x t\ \ \mathrm{dt}=\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x=\frac{x^2}{2};$$

-per $x\leq 0$ si ha

$$\int_0^x f(t)\ \mathrm{dt}=\int_0^x (-t)\ \ \mathrm{dt}=\left[-\frac{t^2}{2}\right]_0^x=-\frac{x^2}{2};$$

Dunque

$$I_{f;0}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\qquad I_{f;0}(x)=\left\{\begin{array}{rl} \frac{x^2}{2} & \text{per } x\geq 0\\ -\frac{x^2}{2} & \text{per } x\leq 0\end{array}\right.$$

Si osservi che f e' continua ma non derivabile in 0, e $I_{f;0}$ e' derivabile (ma non due volte derivabile) in 0.

6. **Proprieta' della funzione integrale. II Teorema fondamentale del calcolo**

I fatti osservati nei due esempi al punto precedente valgono in generale.

Proposizione 2 *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione definita su un intervallo I, integrabile su ogni intervallo chiuso e limitato contenuto in I, e sia $c \in I$. Allora la funzione integrale $I_{f;c} : I \to \mathbb{R}$ e' continua su I.*

II Teorema fondamentale del calcolo:

Teorema 3 *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione definita su un intervallo I, integrabile su ogni intervallo chiuso e limitato contenuto in I, e sia $c \in I$. Se f e' continua in un punto $x_0 \in I$, allora*

-la funzione integrale $I_{f;c} : I \to \mathbb{R}$ e' derivabile in x_0;

-la derivata di $I_{f;c}$ in x_0 e' uguale al valore di f in x_0 :

$$I'_{f;c}(x_0) = f(x_0).$$

In particolare, se f e' continua su I, allora $I_{f;c}$ e' derivabile su I, ed ha funzione derivata f :

$$I'_{f;c} = f.$$

Nel caso in cui la funzione f sia continua su I, questo teorema si puo' ricavare direttamente dal teorema sulla media integrale. [1]

[1]Infatti:

1-l'incremento di $I_{f;c}$ da x_0 a x e'

$$I_{f;c}(x) - I_{f;c}(x_0) = \int_c^x f(t)\ \mathrm{dt} - \int_c^{x_0} f(t)\ \mathrm{dt} = \int_c^x f(t)\ \mathrm{dt} + \int_{x_0}^c f(t)\ \mathrm{dt} = \int_{x_0}^x f(t)\ \mathrm{dt};$$

2-il rapporto incrementale di $I_{f;c}$ da x_0 a x e'

$$\frac{I_{f;c}(x) - I_{f;c}(x_0)}{x - x_0} = \frac{\int_{x_0}^x f(t)\ \mathrm{dt}}{x - x_0};$$

3-la funzione f e' continua sull'intervallo $[x_0, x]$, dunque, per il teorema sulla media integrale, esiste un $\xi \in]x_0, x[$ tale che

$$\frac{\int_{x_0}^x f(t)\ \mathrm{dt}}{x - x_0} = f(\xi).$$

4-dai punti precedenti si ha

$$\lim_{x \to x_0} \frac{I_{f;c}(x) - I_{f;c}(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} f(\xi) = f(x_0);$$

l'ultimo passaggio segue dal fatto che $x_0 < \xi < x$ ed f e' continua in x_0.

Per funzioni riguardate come espressioni in variabili, il I e il II teorema fondamentale si possono esprimere rispettivamente nella forma

$$\int_c^x D_t\, F(t)\, \mathrm{dt} = F(x) - F(c), \qquad (F \textit{ derivabile});$$

$$D_x \int_c^x f(t)\, \mathrm{dt} = f(x), \qquad (f \textit{ continua}).$$