Nella lezione del 29 settembre i logaritmi sono stati presentati velocemente attraverso le funzioni logaritmo, viste come funzioni inverse delle funzioni esponenziali; nella lezione del 1 ottobre i logaritmi sono stati presentati direttamente prescindendo dalle funzioni; si ritiene che quest'ultima sia la presentazione piu' naturale, dunque il suo posto nello sviluppo del discorso e' come ultima lezione sui numeri reali, prima delle lezioni sulle funzioni. .

Logaritmi.

1. Consideriamo l'equazione

   $2^x = 3$

   nell'incognita x in $\mathbb{R}$.

   Osserviamo che questa equazione non ha alcuna soluzione in $\mathbb{Q}$. Infatti se avesse una tale soluzione, essa sarebbe del tipo m/n con $m, n \in \mathbb{N}$ ed $m, n \neq 0$, si avrebbe l'uguaglianza $2^{m/n} = 3$ che equivale all'uguaglianza $2^m = 3^n$, che e' in contraddizione col teorema di fattorizzazione unica.

   Dalle proprieta' delle operazioni e dell'ordine segue che per ogni $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$ con $n < m$ si ha $2^{x_1} < 2^{x_2}$; questo fatto si estende direttamente al caso $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$, quasi direttamente al caso $x_1, x_2 \in \mathbb{Q}$, e in modo non banale anche al caso $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Dunque se l'equazione $2^x = 3$ ha una soluzione in $\mathbb{R}$, questa e' unica. Si prova in modo non banale che una tale soluzione esiste.

   Diamo un'idea molto primitiva di come si possa costruire. Consideriamo la disequazione

   $2^x \leq 3$

   nell'incognita x in $\mathbb{Q}^+$; fra le soluzioni intere ce ne e' una massima ed e' 1; fra le soluzioni con una cifra decimale ce ne e' una massima ed e' $1,1$ (infatti $2^{11/10} < 3$ in quanto $2^{11} < 3^{10}$ mentre $2^{12/10} > 3$ in quanto $2^{12} > 3^{10}$); fra le soluzioni con due cifre decimali ce ne e' una massima ... si ottiene cosi' un numero reale $1,1\ldots$. Si puo' dimostrare che questo numero e' una soluzione dell'equazione data. Si dice che $1,1\ldots$ e' il logaritmo di 3 in base 2 e si scrive

   $$\log_2(3) = 1,1\ldots$$

2. Consideriamo l'equazione

   $2^x = a$

   nell'incognita x in $\mathbb{R}$, dove a e' un parametro in $\mathbb{R}$.

   Dalla definizione di potenza segue direttamente che $2^x > 0$ per ogni $x \in \mathbb{Z}$ e piu' in generale per ogni $x \in \mathbb{Q}$; questo fatto si estende ad ogni $x \in \mathbb{R}$.

   Dunque per ogni $a \leq 0$ l'equazione data non ha soluzioni.

Si prova in modo non banale per ogni $a > 0$ l'equazione ha una ed una sola soluzione; questa soluzione viene detta "logaritmo di a in base 2" e viene indicata con $\log_2(a)$. Dunque per definizione si ha

$$\log_2(a) = c \quad \Leftrightarrow \quad 2^c = a.$$

Ci sono dei logaritmi ovvi, ad esempio

a	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	1	$\sqrt{2}$	2	4	8
$\log_2(a)$	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3

3. Consideriamo l'equazione

   $b^x = a$

   nell'incognita x in $\mathbb{R}$, dove a e b sono due parametri in $\mathbb{R}$.

   Affinche' la potenza b^x sia definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ e' necessario che $b > 0$. Osserviamo che per $b = 1$ l'equazione diviene $1^x = a$, che per $a \neq 1$ non ha soluzioni, e per $a = 1$ ha per soluzione ogni $x \in \mathbb{R}$.

   Si prova in modo non banale per ogni $b \in \mathbb{R}$ con $0 < b \neq 1$ ed ogni $a \in \mathbb{R}$ con $a > 0$, l'equazione ha una ed una sola soluzione in $\mathbb{R}$; questa soluzione viene detta "logaritmo di argomento a in base b" e viene indicata con $\log_b(a)$. Dunque per definizione si ha

   $$\log_b(a) = c \quad \Leftrightarrow \quad b^c = a.$$

   Dalle proprieta' delle potenze seguono le seguenti proprieta' dei logaritmi

   $$\log_b(a_1 a_2) = \log_b(a_1) + \log_b(a_2) \qquad (a_1, a_2 > 0)$$
   $$\log_b(a^\alpha) = \alpha \log_b(a) \qquad (a > 0)$$

   Proviamo la prima proprieta'. Poniamo

   $\log_b(a_1 a_2) = c, \quad \log_b(a_1) = c_1 \quad \log_b(a_2) = c_2,$

   per definizione di logaritmo cio' equivale a porre

   $b^c = a_1 a_2, \quad b^{c_1} = a_1, \quad b^{c_2} = a_2;$

   si ha $b^c = a_1 a_2 = b^{c_1} b^{c_2} = b^{c_1 + c_2}$ e da cio' segue $c = c_1 + c_2$.

4. Nella pratica vengono usati logaritmi in base 2, in base 10 e in base e dove $e = 2,718\ldots$ e' un numero irrazionale detto numero di Nepero, che definiremo piu' avanti. Di regola, noi useremo questi ultimi, e scriveremo $\log_e(a)$ semplicemente $\log(a)$.