Lezione del 19 novembre. Sistemi lineari

1. **Equazioni lineari in una incognita**

   Un'equazione lineare a coefficienti reali in una incognita reale x, in seguito in breve "equazione lineare nell'incognita x", e' un'equazione del tipo

   $$ax = b, \tag{1}$$

   dove a, b sono numeri reali dati. Una soluzione di questa equazione e' un numero reale che sostituito nell'equazione all'incognita x rende vera l'uguaglianza; in simboli, una soluzione dell'equazione e' un $r \in \mathbb{R}$ tale che

   $$ar = b.$$

   Per $a \neq 0$ l'equazione ha una ed una sola soluzione, $x = \frac{b}{a}$; per $a = 0$ e $b \neq 0$ l'equazione non ha soluzioni; per $a = b = 0$ l'equazione ha come soluzione ogni numero reale.

2. **Operazioni su $\mathbb{R}^2$.**

   Consideriamo l'insieme $\mathbb{R}^2$ delle coppie ordinate di numeri reali. Indichiamo ciascuna coppia ordinata con una lettera minuscola sottolineata; di regola, se indichiamo una coppia ordinata con una lettera, indichiamo la sua prima componente con la stessa lettera con indice 1, e indichiamo la sua seconda componente con la stessa lettera con indice 2; ad esempio: $\underline{a} = (a_1, a_2)$.

   Date due coppie ordinate $\underline{a}$ e $\underline{b}$ in $\mathbb{R}^2$, sommando a ciascuna componente di $\underline{a}$ la corrispondente componente di $\underline{b}$ si ottiene una nuova coppia ordinata che si dice somma di $\underline{a}$ e $\underline{b}$ e si indica con $\underline{a} + \underline{b}$; in simboli, per $\underline{a} = (a_1, a_2)$ e $\underline{b} = (b_1, b_2)$ si pone

   $$\underline{a} + \underline{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2).$$

   Per questa operazione di somma di coppie ordinate, la coppia ordinata nulla $\underline{0} = (0, 0)$ svolge il ruolo dello zero, in quanto si ha

   $$\underline{c} + \underline{0} = \underline{c} = \underline{0} + \underline{c}$$

   per ogni $\underline{c} \in \mathbb{R}^2$.

   Per ogni coppia ordinata $\underline{d} \in \mathbb{R}^2$, cambiando segno a ciascuna sua componente si ottiene una nuova coppia ordinata che viene detta opposta di $\underline{d}$ e viene indicata con $-\underline{d}$; in simboli, per $\underline{d} = (d_1, d_2)$ si pone

   $$-\underline{d} = (-d_1, -d_2).$$

   la coppia ordinata $-\underline{d}$ opposta di $\underline{d}$ e' caratterizzata dalla relazione

   $$\underline{d} + (-\underline{d}) = \underline{0} = -\underline{d} + \underline{d}.$$

Dato un numero reale $r \in \mathbb{R}$ ed una coppia ordinata $\underline{a}$ in $\mathbb{R}^2$, moltiplicando per r ciascuna componente di $\underline{a}$ si ottiene una nuova coppia ordinata che si dice prodotto di r per $\underline{a}$ e si indica con $r\underline{a}$; in simboli, per $\underline{a} = (a_1, a_2)$ si pone

$$r\underline{a} = (ra_1, ra_2).$$

3. **Interpretazione geometrica.**

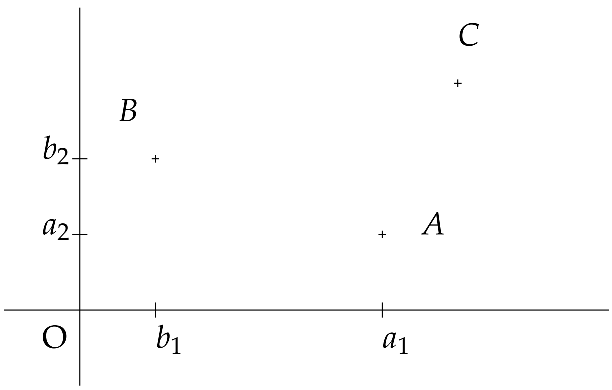
Fissiamo un sistema di riferimento nel piano scegliendo un punto origine O, e due segmenti OE_1 e OE_2, fra loro ortogonali ed aventi la stessa lunghezza. Associamo nel modo usuale ad ogni coppia ordinata di numeri reali un punto del piano; ciascun punto del piano si ottiene in corrispondenza di una ed una sola coppia ordinata di numeri reali.

In particolare, alle coppie $\underline{0} = (0,0)$, $\underline{e}_1 = (1,0)$, $\underline{e}_2 = (0,1)$ saranno associati rispettivamente i punti O, E_1, E_2. Di seguito, se indicheremo una coppia ordinata con una certa lettera minuscola, indicheremo il punto del piano ad essa corrispondente con la corrispondente lettera maiuscola.

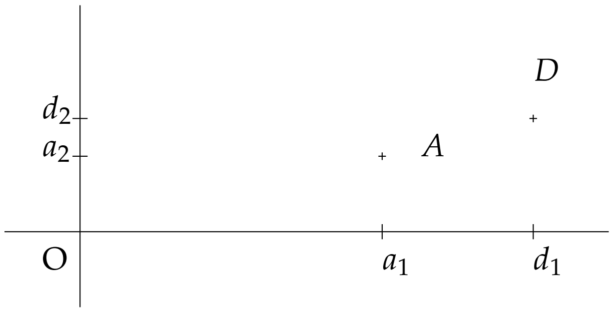
Si prova che le operazioni di somma di due coppie di numeri reali e di prodotto di un numero reale per una coppia di numeri reali hanno il seguente significato geometrico.

Per ogni $\underline{a}$, $\underline{b}$ in $\mathbb{R}^2$ e ogni $r \in \mathbb{R}$,

se $\underline{a} + \underline{b} = \underline{c}$, allora C e' il quarto vertice del parallelogramma avente i tre vertici consecutivi A, O, B;



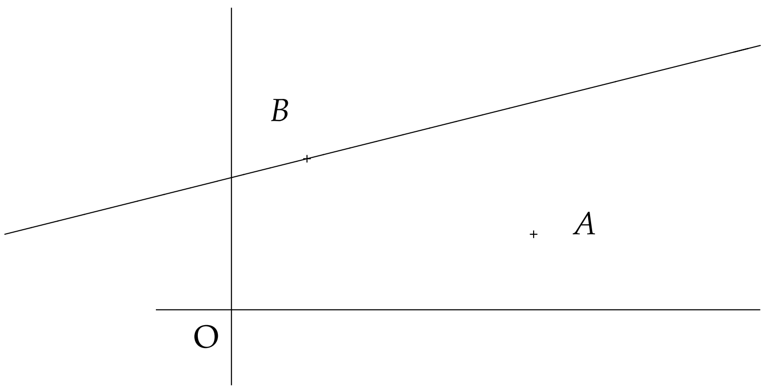
se $r\underline{a} = \underline{d}$, allora D e' il punto della retta OA la cui distanza da O e' $|r|$ volte la distanza di A da O, e che rispetto ad O sta dalla stessa parte di A o dalla parte opposta secondoche r sia positivo o negativo (nella figura seguente $r = \frac{3}{2}$).



Queste descrizioni presuppongono delle condizioni (per parlare di parallelogramma di vertici consecutivi A, O, B occorre che questi punti siano non allineati, per parlare di retta OA occorre che O e A siano distinti), ma si possono estendere senza problemi anche ai casi degeneri.

Osserviamo che:

> data una coppia $\underline{a} \neq \underline{0}$, alle coppie $r\underline{a}$ ottenute al variare di $r \in \mathbb{R}$, corrispondono tutti e soli i punti della retta OA;
>
> date due coppie $\underline{a} \neq \underline{0}$ e $\underline{b}$, alle coppie $r\underline{a} + \underline{b}$ ottenute al variare di $r \in \mathbb{R}$, corrispondono tutti e soli i punti della retta passante per B e parallela alla retta OA;



4. **Equazioni lineari in due incognite**

Un'equazione lineare a coefficienti reali in due incognite reali x_1, x_2, in seguito in breve "equazione lineare nelle incognite x_1, x_2", e' un'equazione del tipo

$$ax_1 + bx_2 = c, \tag{2}$$

dove a, b, c sono numeri reali dati. Una soluzione di questa equazione e' una coppia ordinata di numeri reali che sostituiti nell'equazione alle corrispondenti incognite x_1, x_2 rende vera l'uguaglianza; in simboli, una soluzione della equazione e' una coppia ordinata $\underline{r} = (r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2$ tale che

$$ar_1 + br_2 = c.$$

Risolvere un'equazione significa descrivere esplicitamente le sue soluzioni.

Esempi.

1- Consideriamo l'equazione

$$x_1 + 2x_2 = 3.$$

Possiamo risolvere questa equazione esplicitando $x_1 = -2x_2 + 3$ in funzione di x_2, e ponendo x_2 uguale ad un parametro che varia liberamente in $\mathbb{R}$; la soluzione generale del sistema e'

$$x_1 = -2t + 3; \quad x_2 = t, \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Possiamo scrivere

$$(x_1, x_2) = (-2t + 3, t) = (-2t, t) + (3, 0) = t(-2, 1) + (3, 0).$$

Identificando $\mathbb{R}^2$ col piano, si ha dunque che le soluzioni dell'equazione sono tutti e soli i punti di una retta, la retta che passa per il punto $(3, 0)$ ed e' parallela alla retta congiungente l'origine col punto $(-2, 1)$. Posto $\underline{x} = (x_1, x_2)$, $\underline{v} = (-2, 1)$, $\underline{p} = (3, 0)$, possiamo riscrivere la soluzione generale del sistema sinteticamente nella forma

$$\underline{x} = t\underline{v} + \underline{p}, \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

2- Consideriamo l'equazione nelle incognite x_1, x_2

$$x_2 = 4.$$

La soluzione generale del sistema e'

$$x_1 = t; \quad x_2 = 4, \qquad (t \in \mathbb{R}),$$

in altri termini

$$(x_1, x_2) = (t, 4) = t(1, 0) + (0, 4).$$

Identificando $\mathbb{R}^2$ col piano, si ha che le soluzioni dell'equazione sono tutti e soli i punti della retta che passa per il punto $(0, 4)$ ed e' parallela al I asse coordinato.

Diciamo che un'equazione $ax_1 + bx_2 = c$ nella quale almeno uno dei coefficienti a, b delle incognite e' diverso da 0 e' un'equazione "effettiva". Una tale equazione ha infinite soluzioni che dipendono da un parametro libero. Identificato $\mathbb{R}^2$ col piano, le soluzioni dell'equazione sono tutti e soli i punti di una retta.

Ciascuna equazione $0x_1 + 0x_2 = c$ con $c \neq 0$ non ha alcuna soluzione.

L'equazione $0x_1 + 0x_2 = 0$ ha come soluzione ogni coppia ordinata di numeri reali.

Per una generica equazione lineare in due incognite ci si aspetta che sia effettiva, equivalentemente che abbia infinte soluzioni dipendenti da un parametro, equivalentemente che sia rappresentata da una retta.

5. Un sistema lineare di due equazioni nelle incognite x_1, x_2 e' un sistema del tipo

$$\begin{cases} a_1x_1 + b_1x_2 = c_1 \\ a_2x_1 + b_2x_2 = c_2 \end{cases} \tag{3}$$

dove $a_1, b_1, \ldots, c_2$ sono numeri reali dati. Una soluzione del sistema e' una coppia ordinata di numeri reali che sia soluzione di ciascuna delle due equazioni; in simboli, una soluzione del sistema e' una coppia ordinata $\underline{r} = (r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2$ tale che

$$a_ir_1 + b_ir_2 = c_i, \quad i = 1, 2.$$

Esempi.

1- Consideriamo il sitema lineare

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1 \\ 4x_1 - 9x_2 = 5 \end{cases}.$$

Possiamo risolvere questo sistema col metodo di sostituzione. Ricaviamo dalla prima equazione x_1 in funzione di x_2, e sostitiamo nella seconda equazione, otteniamo

$$\begin{cases} x_1 &= 2x_2 + 1 \\ 4(2x_2 + 1) - 9x_2 &= 5 \end{cases},$$

cioe'

$$\begin{cases} x_1 &= 2x_2 + 1 \\ -x_2 &= 1 \end{cases};$$

dalla seconda equazione ricaviamo il valore $x_2 = -1$ dell'incognita x_2;

sostituiamo questo valore di x_2 nella prima equazione, ed otteniamo il valore $x_1 = -2 + 1 = -1$ dell'incognita x_1.

Il sistema ha una ed una sola soluzione, la coppia $(-1, -1)$.

Identificando $\mathbb{R}^2$ col piano, abbiamo che gli insiemi delle soluzioni delle due equazioni sono due rette, e la soluzione $(-1, 1)$ del sistema e' il punto intersezione delle due rette.

2- Consideriamo il sitema lineare

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 = 5 \end{cases}.$$

Osserviamo che il I membro della seconda equazione e' 2 volte il I membro della prima equazione, ma il II membro della seconda equazione non e' 2 volte il II membro della prima equazione. Dunque le due equazioni sono incompatibili, e il sistema non ha soluzioni.

Identificando $\mathbb{R}^2$ col piano, abbiamo che gli insiemi delle soluzioni delle due equazioni sono due rette parallele.

3- Consideriamo il sitema lineare

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 = 6 \end{cases} .$$

Osserviamo che il I membro della seconda equazione e' 2 volte il I membro della prima equazione, e il II membro della seconda equazione e' 2 volte il II membro della prima equazione. Dunque le due equazioni sono equivalenti, e il sistema e' equivalente ad una delle due equazioni.

Identificando $\mathbb{R}^2$ col piano, abbiamo che le due equazioni hanno come insieme delle soluzioni la stessa retta.

In generale, consideriamo un sistema lineare

$$\begin{cases} a_1x_1 + b_1x_2 = c_1 \\ a_2x_1 + b_2x_2 = c_2 \end{cases} .$$

composto da due equazioni lineari effettive. Identificato $\mathbb{R}^2$ col piano, l'insieme delle soluzioni di ciascuna delle due equazioni sara' una retta.

Si ha:

1-se le coppie (a_1, b_1) e (a_2, b_2) non sono proporzionali, allora il sistema ha una ed una sola soluzione (r_1, r_2). Le due rette associate alle due equazioni sono incidenti nel punto (r_1, r_2);

2-se le coppie (a_1, b_1) e (a_2, b_2) sono proporzionali, e le terne (a_1, b_1, c_1) e (a_2, b_2, c_2) non sono proprzionali, allora il sistema non ha alcuna soluzione. Le due rette associate alle due equazioni sono parallele;

3-se le terne (a_1, b_1, c_1) e (a_2, b_2, c_2) sono proprzionali, allora il sistema infinite soluzioni che dipendono da un parametro libero. Le due rette associate alle due equazioni coincidono.

Per un generico sistema lineare di due equazioni in due incognite ci si aspetta che si verifichi il primo caso, equivalentemente che abbia una ed una sola soluzione, equivalentemente che le sue due equazioni siano rappresentate da rette incidenti.

Per un generico sistema lineare

$$\begin{cases} a_1x_1 + b_1x_2 = c_1 \\ a_2x_1 + b_2x_2 = c_2 \\ a_3x_1 + b_3x_2 = c_3 \end{cases} . \tag{4}$$

composto da tre equazioni lineari effettive, ci si aspetta che non abbia alcuna soluzione, equivalentemente che le sue tre equazioni siano rappresentate da rette a due a due incidenti ma non incidenti in uno stesso punto.

6. **Operazioni su $\mathbb{R}^3$.**

Consideriamo l'insieme $\mathbb{R}^3$ delle terne ordinate di numeri reali. Indichiamo ciascuna terna ordinata con una lettera minuscola sottolineata; di regola, se indichiamo una terna ordinata con una lettera, indichiamo la sua prima, seconda, terza componente con la stessa lettera con indice 1, 2, 3; ad esempio: $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$.

Date due terne ordinate $\underline{a}$ e $\underline{b}$ in $\mathbb{R}^3$, sommando a ciascuna componente di $\underline{a}$ la corrispondente componente di $\underline{b}$ si ottiene una nuova terna ordinata che si dice somma di $\underline{a}$ e $\underline{b}$ e si indica con $\underline{a} + \underline{b}$; in simboli, per $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ e $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3)$ si pone

$$\underline{a} + \underline{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3).$$

Per questa operazione di somma di terne ordinate, la terna ordinata nulla $\underline{0} = (0, 0, 0)$ svolge il ruolo dello zero, in quanto si ha

$$\underline{c} + \underline{0} = \underline{c} = \underline{0} + \underline{c}$$

per ogni $\underline{c} \in \mathbb{R}^3$.

Per ogni terna ordinata $\underline{d} \in \mathbb{R}^3$, cambiando segno a ciascuna sua componente si ottiene una nuova terna ordinata che viene detta opposta di $\underline{d}$ e viene indicata con $-\underline{d}$; in simboli, per $\underline{d} = (d_1, d_2, d_3)$ si pone

$$-\underline{d} = (-d_1, -d_2, -d_3).$$

la terna ordinata $-\underline{d}$ opposta di $\underline{d}$ e' caratterizzata dalla relazione

$$\underline{d} + (-\underline{d}) = \underline{0} = -\underline{d} + \underline{d}.$$

Dato un numero reale $r \in \mathbb{R}$ ed una terna ordinata $\underline{a}$ in $\mathbb{R}^3$, moltiplicando per r ciascuna componente di $\underline{a}$ si ottiene una nuova terna ordinata che si dice prodotto di r per $\underline{a}$ e si indica con $r\underline{a}$; in simboli, per $\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$ si pone

$$r\underline{a} = (ra_1, ra_2, ra_3).$$

7. **Interpretazione geometrica.**

Fissiamo un sistema di riferimento nello spazio scegliendo un punto origine O, e tre segmenti OE_1, OE_2, OE_3 a due a due ortogonali ed aventi la stessa lunghezza. Associamo nel modo usuale ad ogni terna ordinata di numeri reali un punto dello spazio; ciascun punto dello spazio si ottiene in corrispondenza di una ed una sola terna ordinata di numeri reali.

In particolare, alle terne $\underline{0} = (0, 0, 0)$, $\underline{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\underline{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\underline{e}_3 = (0, 0, 1)$ saranno associati rispettivamente i punti O, E_1, E_2, E_3. Di seguito, se indicheremo una terna ordinata con una certa lettera minuscola, indicheremo il punto dello spazio ad essa corrispondente con la corrispondente lettera maiuscola.

Si prova che le operazioni di somma di terne di numeri reali e di prodotto di un numero reale per una terna di numeri reali hanno il seguente significato geometrico.

Per ogni $\underline{a}, \underline{b}$ in $\mathbb{R}^3$ e ogni $r \in \mathbb{R}$,

> se $\underline{a} + \underline{b} = \underline{c}$, allora C e' il quarto vertice del parallelogramma avente i tre vertici consecutivi A, O, B;
>
> se $r\underline{a} = \underline{d}$, allora D e' il punto della retta OA la cui distanza da O e' $|r|$ volte la distanza di A da O, e che rispetto ad O sta dalla stessa parte di A o dalla parte opposta secondoche r sia positivo o negativo.

Queste descrizioni presuppongono delle condizioni, ma si possono estendere senza problemi anche ai casi degeneri.

Si ha che:

> data una terna $\underline{a} \neq \underline{0}$, alle terne $r\underline{a}$ ottenute al variare di $r \in \mathbb{R}$, corrispondono tutti e soli i punti della retta OA;
>
> date due terne $\underline{a} \neq \underline{0}$ e $\underline{b}$, alle terne $r\underline{a} + \underline{b}$ ottenute al variare di r in $\mathbb{R}$, corrispondono tutti e soli i punti della retta passante per B parallela alla retta OA;
>
> date due terne $\underline{a}$ e $\underline{b}$ fra loro non proporzionali, alle terne $r\underline{a} + s\underline{b}$ ottenute al variare di r ed s in $\mathbb{R}$, corrispondono tutti e soli i punti del piano passante per O, A e B;
>
> date due terne $\underline{a}$ e $\underline{b}$ fra loro non proporzionali e una terna $\underline{c}$, alle terne $r\underline{a} + s\underline{b} + \underline{c}$ ottenute al variare di r ed s in $\mathbb{R}$, corrispondono tutti e soli i punti del piano passante per C parallelo al piano per O, A, B.

8. **Equazioni lineari in tre incognite**

Un'equazione lineare a coefficienti reali in tre incognite reali x_1, x_2, x_3 in seguito in breve "equazione lineare nelle incognite x_1, x_2, x_3", e' un'equazione del tipo

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = d, \tag{5}$$

dove a, b, c, d sono numeri reali dati. Una soluzione di questa equazione e' una terna ordinata di numeri reali che sostituiti nell'equazione alle corrispondenti incognite x_1, x_2, x_3 rende vera l'uguaglianza; in simboli, una soluzione della equazione e' una terna ordinata $\underline{r} = (r_1, r_2, r_3) \in \mathbb{R}^3$ tale che

$$ar_1 + br_2 + cr_3 = d.$$

Risolvere un'equazione significa descrivere esplicitamente le sue soluzioni.

Esempi.

1- Consideriamo l'equazione

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4.$$

Possiamo risolvere questa equazione esplicitando $x_1 = -2x_2 - 3x_3 + 4$ in funzione di x_2, x_3 e ponendo x_2 ed x_3 uguali a due parametri che variano liberamente in $\mathbb{R}$; la soluzione generale del sistema e'

$$x_1 = -2s - 3t + 4; \quad x_2 = s, \quad x_3 = t, \qquad (s, t \in \mathbb{R}).$$

Possiamo scrivere

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, x_3) = (-2s - 3t + 4, s, t) &= (-2s, s, 0) + (-3t, 0, t) + (4, 0, 0) \\ &= s(-2, 1, 0) + t(-3, 0, 1) + (4, 0, 0).\end{aligned}$$

Identificando $\mathbb{R}^3$ con lo spazio, si ha dunque che le soluzioni dell'equazione sono tutti e soli i punti di un piano, il piano che passa per il punto $(4, 0, 0)$ ed e' parallelo al piano per l'origine e i punti $(-2, 1, 0)$, $(-3, 0, 1)$. Posto $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\underline{u} = (-2, 1, 0)$, $\underline{v} = (-3, 0, 1)$, $\underline{p} = (4, 0, 0)$, possiamo riscrivere la soluzione generale del sistema sinteticamente nella forma

$$\underline{x} = s\underline{u} + t\underline{v} + \underline{p}, \qquad (s, t \in \mathbb{R}).$$

Diciamo che un'equazione $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ nella quale almeno uno dei coefficienti a, b, c delle incognite e' diverso da 0 e' un'equazione "effettiva". Una tale equazione ha infinite soluzioni che dipendono da due parametri liberi. Identificato $\mathbb{R}^3$ con lo spazio, le soluzioni dell'equazione sono tutti e soli i punti di un piano. Per una generica equazione lineare in tre incognite ci si aspetta che sia effettiva.

9. Un sistema lineare di due equazioni nelle incognite x_1, x_2, x_3 e' un sistema del tipo

$$\begin{cases} a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 = d_1 \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 = d_2 \end{cases}, \tag{6}$$

dove $a_1, b_1, \ldots, c_2, d_2$ sono numeri reali dati. Una soluzione del sistema e' una terna ordinata di numeri reali che sia soluzione di ciascuna delle due equazioni.

Esempio.

1- Consideriamo il sitema lineare

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 2x_1 + 5x_2 + 8x_3 = 9 \end{cases}.$$

Possiamo risolvere questo sistema col metodo di sostituzione.

Ricaviamo dalla prima equazione x_1 in funzione di x_2, x_3 e sostitiamo nella seconda equazione, ed otteniamo

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & -2x_2 - 3x_3 + 4 \\ 2(-2x_2 - 3x_3 + 4) + 5x_2 + 8x_3 & = & 9 \end{array} \right. ,$$

cioe'

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & -2x_2 - 3x_3 + 4 \\ x_2 + 2x_3 & = & 1 \end{array} \right. ;$$

dalla seconda equazione ricaviamo x_2 in funzione di x_3,

$$x_2 = -2x_3 + 1;$$

sostituiamo nella prima equazione, ed otteniamo x_1 in funzione di x_3,

$$x_1 = -2(-2x_3 + 1) - 3x_3 + 4 = x_1 = x_3 + 2.$$

L'incognita x_3 e' libera di assumere qualsiasi valore in $\mathbb{R}$.

La soluzione generale del sistema e'

$$x_1 = t + 2; \quad x_2 = -2t + 1; \quad x_3 = t, \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Possiamo scrivere

$$(x_1, x_2, x_3) = (t + 2, -2t + 1, t) = (t, -2t, t) + (1, 0, 0) = t(1, -2, 1) + (1, 0, 0).$$

Identificando $\mathbb{R}^3$ con lo spazio, si ha dunque che le soluzioni dell'equazione sono tutti e soli i punti di una retta, la retta che passa per il punto $(1, 0, 0)$ ed e' parallela alla retta congiungente l'origine col punto $(1, -2, 1)$. Posto $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\underline{v} = (1, -2, 1)$, $\underline{p} = (1, 0, 0)$, possiamo riscrivere la soluzione generale del sistema sinteticamente nella forma

$$\underline{x} = t\underline{v} + \underline{p}, \qquad (t \in \mathbb{R}).$$