Lezione del 21 novembre. Sistemi lineari

1. **Spaio vettoriale $\mathbb{R}^n$**

   Sia n un intero positivo fissato. Consideriamo l'inisieme $\mathbb{R}^n$ delle $n-$ple ordinate di numeri reali

   $$\underline{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n), \quad u_i \in \mathbb{R}.$$

   Al posto di "$n-$pla ordinata di numeri reali" diremo "vettore ad n componenti reali", in breve "vettore"; al posto di "numero reale" diremo "scalare reale", in breve "scalare".

   -Somma di vettori. Per ogni due vettori di $\mathbb{R}^n$, sommando le componenti che occupano lo stesso posto si ottiene un vettore di $\mathbb{R}^n$ che si dice vettore somma dei due vettori dati. In simboli, per ogni due vettori $\underline{u} = (u_1, \dots, u_n)$ e $\underline{v} = (v_1, \dots, v_n)$ si definisce il vettore somma $\underline{u} + \underline{v}$ ponendo

   $$\underline{u} + \underline{v} = (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n).$$

   Il vettore $\underline{0} = (0, \dots, 0)$ si dice "vettore nullo" di $\mathbb{R}^n$; esso svolge per la somma di vettori il ruolo dello zero, nel senso che

   $$\underline{u} + \underline{0} = \underline{u} = \underline{0} + \underline{u}, \qquad \textit{per ogni } \underline{u} \in \mathbb{R}^n.$$

   Per ogni vettore di $\mathbb{R}^n$, cambiando segno ad ogni componente si ottiene un vettore di $\mathbb{R}^n$, che si dice vettore opposto del vettore dato. In simboli, per ogni vettore $\underline{v} = (v_1, \dots, v_n)$ si definisce il vettore opposto $-\underline{v}$ ponendo

   $$-\underline{v} = (-v_1, \dots, -v_n).$$

   Questo vettore e' caratterizzata dalla relazione

   $$\underline{v} + (-\underline{v}) = \underline{0} = -\underline{v} + \underline{v}.$$

   L'operazione di somma di vettori di $\mathbb{R}^n$ eredita dall'operazione di somma di numeri in $\mathbb{R}$ le proprieta' associativa e commutativa:

   $$\begin{aligned}&(\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w} = \underline{u} + (\underline{v} + \underline{w}),\\ &\underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{u}\end{aligned}$$

   per ogni $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^n$.

   -Prodotto di scalari per vettori. Dati uno scalare in $\mathbb{R}$ ed un vettore in $\mathbb{R}^n$, moltiplicando lo scalare ciascuna componente del vettore, si ottiene una vettore in $\mathbb{R}^n$ che si dice prodotto dello scalare per il vettore. In simboli, per ogni scalare $r \in \mathbb{R}$ ed ogni vettore $\underline{u} = (u_1, \dots, u_n)$ si definisce il prodotto $r\underline{v}$ di r per $\underline{u}$ ponendo

   $$r\underline{u} = (ru_1, \dots, ru_n).$$

Lo scalare 1 ha la proprieta'

$$1\underline{u} = \underline{u}, \qquad \textit{per ogni } \underline{u} \in \mathbb{R}^n.$$

-Proprieta'. Le proprieta' distributive del prodotto di numeri reali rispetto alla somma di numeri reali e la proprieta' associativa del prodotto di numeri reali implicano le seguenti proprieta' del prodotto di scalari per vettori

$$\begin{aligned} r(\underline{u}+\underline{v}) &= r\underline{u} + r\underline{v} \\ (r+s)\underline{u} &= r\underline{u} + s\underline{u} \\ (rs)\underline{u} &= r(s\underline{u}). \end{aligned}$$

L'insieme $\mathbb{R}^n$ munito delle operazioni di somma vettori e di prodotto di scalari reali per vettori, si dice "spazio vettoriale reale $n-$dimensionale standard."

In generale, uno spazio vettoriale reale e' un insieme munito di un'operazione di somma fra ogni due suoi elementi e di un'operazione di prodotto fra ogni numero reale ed ogni suo elemento, che soddisfano tutte le proprieta' sopra elencate. Ad esempio, sono spazi vettoriali: l'insieme delle successioni di numeri reali, con le usuali operazioni di somma di due successioni e di prodotto di un numero reale per una successione; l'insieme delle funzioni reali definite su un dato sottinsieme di $\mathbb{R}$ con le usuali operazioni di somma di due funzioni e di prodotto di un numero reale per una funzione.

2. **Combinazioni lineari**

Per ogni due vettori $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^n$ ed ogni due scalari $r, s \in \mathbb{R}$, l'epressione

$$r\underline{u} + s\underline{v}$$

si dice "combinazione lineare di $\underline{u}$ e $\underline{v}$ con coefficienti r ed s".

Esempio. La combinazione lineare dei vettori $(1,1,0)$ e $(0,1,1)$ di $\mathbb{R}^3$ con coefficienti $\frac{1}{2}$ e $-\frac{1}{3}$ e' l'espressione

$$\frac{1}{2}(1,1,0) + (-\frac{1}{3})(0,1,1),$$

che a sua volta porge il vettore

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) - \left(0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{3}\right).$$

Per ogni sequenza di vettori $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_m$, ed ogni sequenza di un uguale numero di scalari $r_1, r_2, \dots, r_m$ l'espressione

$$r_1\underline{u}_1 + r_2\underline{u}_2 + \cdots + r_m\underline{u}_m = \sum_{i=1}^{n} r_i\underline{u}_i$$

si dice "combinazione lineare di $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_m$ con coefficienti $r_1, r_2, \ldots, r_m$".

In quessti termini possimo riesprimere alcuni fatti descritti nella lezione precedente riguardanti le equazioni lineari in due e tre incognite. Consideriamo ad esempio l'equazione lineare nelle incognite x_1, x_2, x_3

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0.$$

Possiamo risolvere questa equazione esplicitando $x_1 = -2x_2 - 3x_3$ in funzione di x_2, x_3 e ponendo x_2 ed x_3 uguali a due parametri che variano liberamente in $\mathbb{R}$. Le soluzioni del sistema sono i vettori

$$(x_1, x_2, x_3) = (-2s - 3t, s, t) = s(-2, 1, 0) + t(-3, 0, 1)$$

ottenuti al variare di s, t in $\mathbb{R}$. Questi vettori sono tutte e sole le combinazioni lineari dei vettori $(-2, 1, 0)$ e $(-3, 0, 1)$, non proporzionali fra loro. Identificati i vettori di $\mathbb{R}^3$ con i punti dello spazio ordinario, a queste combinazioni lineari corrispondono tutti e soli i punti di un piano che passa per l'origine.

3. **Vettori canonici**

-Vettori canonici di $\mathbb{R}^2$. Per ogni $\underline{u} = (u_1, u_2)$ in $\mathbb{R}^2$, si ha

$$\begin{aligned}\underline{u} = (u_1, u_2) &= (u_1, 0) + (0, u_2) \\ &= u_1(1, 0) + u_2(0, 1) = u_1\underline{e}_1 + u_2\underline{e}_2,\end{aligned}$$

dove $\underline{e}_1 = (1, 0)$ e $\underline{e}_2 = (0, 1)$ sono "i vettori canonici di $\mathbb{R}^2$". Possiamo esprimere questo fatto dicendo che

> ciascun vettore di $\mathbb{R}^2$ si puo' scrivere come la combinazione lineare dei due vettori canonici di $\mathbb{R}^2$ con coefficenti le due componenti del vettore.

-Vettori canonici di $\mathbb{R}^n$. Per ogni $\underline{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ in $\mathbb{R}^n$, si ha

$$\begin{aligned}\underline{u} &= (u_1, u_2, \ldots, u_n) \\ &= (u_1, 0, \ldots, 0) + (0, u_2, \ldots, 0) + \cdots + (0, 0, \ldots, u_n) \\ &= u_1(1, 0, \ldots, 0) + u_2(0, 1, \ldots, 0) + \cdots + u_n(0, 0, \ldots, 1) \\ &= u_1\underline{e}_1 + u_2\underline{e}_2 + \cdots + u_n\underline{e}_n \\ &= \sum_{i=1}^{n} u_i\underline{e}_i,\end{aligned}$$

dove $\underline{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $\underline{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0)$, ... $\underline{e}_n = (0, 0, \ldots, 1)$ sono "i vettori canonici di $\mathbb{R}^n$". Possiamo esprimere questo fatto dicendo che

> ciascun vettore di $\mathbb{R}^n$ si puo' scrivere come la combinazione lineare degli n vettori canonici di $\mathbb{R}^n$ con coefficenti le n componenti del vettore.

4. **Applicazioni lineari da $\mathbb{R}^n$ ad $\mathbb{R}$**

Una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ si dice funzione lineare, o applicazione lineare, se si comporta bene rispetto alle operazioni definite in $\mathbb{R}^n$ (somma di vettori e prodotto scalari per vettori) e alle operazioni definite in $\mathbb{R}$ (somma e prodotto di scalari), nel senso che

$$f(\underline{u} + \underline{v}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v})$$
$$f(r\underline{u}) = rf(\underline{u}),$$

per ogni $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^n$ ed ogni $r \in \mathbb{R}$. In tal caso f si comporta bene anche rispetto alle combinazioni lineari, nel senso che

$$f(r_1\underline{u}_1 + r_2\underline{u}_2) = f(r_1\underline{u}_1) + f(r_2\underline{u}_2) = r_1 f(\underline{u}_1) + r_2 f(\underline{u}_2)$$

e piu' in generale

$$f\left(\sum_{i=1}^{m} r_i\underline{u}_i\right) = \sum_{i=1}^{m} r_i f(\underline{u}_i)$$

per ogni $\underline{u}_1$, ... $\underline{u}_m \in \mathbb{R}^n$ ed ogni $r_1, \ldots, r_m \in \mathbb{R}$.

-Esempio 1. La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = 2x$ e' lineare; infatti per ogni $u, v \in \mathbb{R}$ ed ogni $r \in \mathbb{R}$

si ha:

$f(u + v) = 2(u + v); \quad f(u) + f(v) = 2u + 2v;$

ora, $2(u + v) = 2u + 2v$, da cui

$f(u + v) = f(u) + f(v);$

si ha

$f(ru) = 2(ru); \quad rf(u) = r(2u);$

ora, $2(ru) = r(2u)$, da cui

$f(ru) = rf(u).$

-Esempio 2. Allo stesso modo si prova che ciascuna funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = mx$ (m costante) e' lineare.

-Esempio 3. La funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $g(x) = x + 1$ non e' lineare, in quanto per $u, v \in \mathbb{R}$

si ha

$g(u + v) = u + v + 1; \quad g(u) + g(v) = u + 1 + v + 1$

e l'uguaglianza $u + v + 1 = u + 1 + v + 1$ non e' sempre vera (in realta' non e' mai vera).

-Esempio 4. La funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$ e' lineare; infatti per ogni $\underline{u} = (u_1, u_2)$, $\underline{v} = (v_1, v_2)$, in $\mathbb{R}^2$ ed ogni $r \in \mathbb{R}$

si ha:

$f\left(\underline{u}+\underline{v}\right)=f\left(u_1+v_1,u_2+v_2\right)=2(u_1+v_1)+3(u_2+v_2);$

$f\left(\underline{u}\right)+f\left(\underline{v}\right)=2u_1+3u_2+2v_1+3v_2;$

ora, $2(u_1+v_1)+3(u_2+v_2)=2u_1+3u_2+2v_1+3v_2$, da cui

$f\left(\underline{u}+\underline{v}\right)=f\left(\underline{u}\right)+f\left(\underline{v}\right);$

si ha

$f\left(r\underline{u}\right)=f\left(ru_1,ru_2\right)=2(ru_1)+3(ru_2);$

$rf\left(\underline{u}\right)=r(2u_1+3u_2);$

ora, $2(ru_1)+3(ru_2)=r(2u_1+3u_2)$, da cui

$f\left(r\underline{u}\right)=rf\left(\underline{u}\right).$

5. In modo leggermente informale si puo' dire che ogni polinomio omogeneo di primo grado e' lineare, precisamente si ha:

Proposizione 1 *Ogni funzione* $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ *del tipo*

$$f\left((x_i)_1^n\right)=\sum_{i=1}^n a_ix_i,$$

dove $a_1,\ldots,a_n$ *sono costanti in* $\mathbb{R}$, *e' lineare.*

Dimostrazione. Per ogni $(u_i)_1^n$, $(v_i)_1^n$, in $\mathbb{R}^n$ ed ogni $r\in\mathbb{R}$ si ha:

$$\begin{aligned} f\left((u_i)_1^n+(v_i)_1^n\right) &= f\left((u_i+v_i)_1^n\right)\\ &= \sum_{i=1}^n a_i(u_i+v_i);\\ &= \sum_{i=1}^n a_iu_i+\sum_{i=1}^n a_iv_i=f\left((u_i)_1^n\right)+f\left((v_i)_1^n\right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f\left(r\,(u_i)_1^n\right) &= f\left((ru_i)_1^n\right)\\ &= \sum_{i=1}^n a_i(ru_i);\\ &= r\sum_{i=1}^n a_iu_i=rf\left((u_i)_1^n\right). \end{aligned}$$

Vale anche il viceversa: in modo leggermente informale si puo' dire che ogni funzione lineare e' un polinomio omogeneo di primo grado, precisamente

Proposizione 2 *Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ un'applicazione lineare; allora*

$$f\left((x_i)_1^n\right) = \sum_{i=1}^n a_i x_i,$$

dove gli scalari $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ sono i valori assunti da f sui vettori canonici di $\mathbb{R}^n$.

Dimostrazione. Si ha

$$f\left((x_i)_1^n\right) = f\left(\sum_{i=1}^n x_i \underline{e}_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i f\left(\underline{e}_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i x_i.$$

6. **Equazioni lineari in n incognite**

Un'equazione lineare in n incognite $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e' un'equazione del tipo

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$

dove $a_1, a_2, \cdots, a_n$ e b sono numeri reali dati, detti rispettivamente coefficienti e termine noto dell'equazione; in breve, l'equazione si scrive

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i = b.$$

Una soluzione dell'equazione e' una $n-$pla $(r_i)_1^n \in \mathbb{R}^n$ tale che

$$\sum_{i=1}^n a_i r_i = b.$$

Da un altro punto di vista, si puo' dire che un'equazione lineare in n incognite reali e' un'equazione del tipo

$$f(\underline{x}) = b,$$

dove $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e' una funzione lineare e $b \in \mathbb{R}$, e che una soluzione dell'equazione e' un vettore $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ tale che

$$f(\underline{v}) = b.$$

Esempio. Consideriamo l'equazione nelle incognite $x_1, \ldots, x_4$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5.$$

Possiamo risolvere l'equazione esplicitando $x_1 = -2x_2 - 3x_3 - 4x_4 + 5$ in funzione di x_2, x_3, x_4 e ponendo x_2, x_3, x_4 uguali a tre parametri che variano liberamente in $\mathbb{R}$; la soluzione generale del sistema e'

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, x_3, x_4) &= (-2p - 3q - 4r, p, q, r) \\ &= p(-2,1,0,0) + q(-3,0,1,0) + r(-4,0,0,1) + (5,0,0,0),\end{aligned}$$

Dunque sinteticamente la soluzione generale del sistema si scrive

$$\underline{x} = p\underline{u} + q\underline{v} + r\underline{w} + \underline{a} \qquad (p, q, r \in \mathbb{R}),$$

cioe' come la somma di un vettore con la generica combinazine lineare di tre vettori.