Lezione del 24 novembre. Sistemi lineari

1. Nelle lezioni scorse abbiamo considerato sistemi di equazioni lineari dei seguenti tipi: un'equazione in un incognita; una, due o tre equazioni in due incognite; una o due equazioni in tre incognite. Abbiamo definito le operazioni di somma e di prodotto per numeri reali in $\mathbb{R}^2$ e in $\mathbb{R}^3$, ed abbiamo descritto i seguenti fatti:

   -in due incognite, l'insieme delle soluzioni di una equazione lineare effettiva e' rappresentato da una retta nel piano, e dunque l'insieme delle soluzioni di un sistema di tali equazioni e' rappresentato dall'intersezione di piu' rette nel piano;

   -in tre incognite, l'insieme delle soluzioni di una equazione lineare effettiva e' rappresentato da un piano nello spazio, e dunque l'insieme delle soluzioni di un sistema di tali equazioni e' rappresentato dall'intersezione di piu' piani nello spazio.

   Infine abbiamo definito lo spazio vettoriale $n-$dimensionale standard $\mathbb{R}^n$, le funzioni lineari $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, e abbiamo considerato le equazioni lineari in un numero qualsiasi d'incognite.

2. **Sistemi lineari in n incognite**

   Un sistema di m equazioni lineari in n incognite $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e' una sequenza di m equazioni lineari

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \qquad (1)$$

   in breve

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m,$$

   dove $a_{11}, a_{12}, \ldots, b_1, \ldots, a_{mn}, b_m$ sono costanti reali; gli a_{ij} sono i coefficienti e i b_i sono i termini noti del sistema. Una soluzione del sistema e' un vettore $\underline{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ che sia soluzione di ciscuna equazione del sistema:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}v_j = b_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m.$$

   Possiamo rappresentare i dati che caratterizzano il sistema lineare con una matrice avente nelle prima riga i coefficienti e il termine noto della prima equazione, nelle seconda riga i coefficienti e il termine noto della seconda equazione, ...

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right];$$

nella prima colonna di questa matrice compaiono i coefficienti della prima incognita x_1 nelle varie equazioni, nella seconda colonna di questa matrice compaiono i coefficienti della seconda incognita x_2 nelle varie equazioni, ... nell'ultima colonna di questa matrice compaiono i termini noti delle varie equazioni.

Un sistema si dice

- "impossibile" se non possiede alcuna soluzione;
- "determinato" se possiede una ed una sola soluzione;
- "indeterminato" se possiede piu' di una soluzione.

Vedremo in seguito che un sistema indeterminato in realta' possiede infinite soluzioni.

Diciamo che due sistemi lineari sono "equivalenti" quando hanno lo stesso insieme delle soluzioni.

Si puo' proseguire sviluppando una geometria delle equazioni e dei sistemi di equazioni in n incognite. Interrompiamo per il momento questo percorso.

In questa lezione e nella prossima consideriamo sistemi lineari nei quali il numero delle equazioni e' uguale al numero delle incognite. Informalmente, si puo' dire che un tale sistema ha quasi sempre una ed una sola soluzione. Questa soluzione puo' essere determinata col metodo di sostituzione. Di seguito descriviamo il metodo di eliminazione, che e' piu' vicino a quelli che vengono usati per la risoluzione dei grandi sistemi da parte degli elaboratori, che generalmente e' piu' efficiente anche per la risoluzione dei sistemi con carta e penna, ed ha una valenza teorica superiore.

3. **Metodo di eliminazione, I, esempio**

E' dato il sistema lineare di tre equazioni nelle tre incognite x, y, z

$$\begin{array}{l} eq_1 \\ eq_2 \\ eq_3 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x - 2y + 6z = 11 \\ -x + 3y - 11z = -18 \\ 2x - 5y + 20z = 32 \end{array} \right.$$

Il metodo consiste di due parti:

-I parte (eliminazione)

Eliminiamo l'incognita x dalla seconda equazione, sommando alla seconda equazione la prima equazione, e

eliminiamo l'incognita x dalla terza equazione, sommando alla terza equazione (-2) volte la prima equazione; otteniamo il sistema

$$\begin{array}{r} \\ eq_2 + eq_1 \\ eq_3 - 2eq_1 \end{array} \left\{ \begin{array}{r} x - 2y + 6z = 11 \\ y - 5z = -7 \\ -y + 8z = 10 \end{array} \right. ;$$

eliminiamo l'incognita y dalla terza equazione, sommando alla terza equazione la seconda equazione; otteniamo il sistema

$$\begin{array}{r} \\ \\ eq_3 + eq_2 \end{array} \left\{ \begin{array}{r} x - 2y + 6z = 11 \\ y - 5z = -7 \\ 3z = 3 \end{array} \right.$$

-II parte (risoluzione per sostituzione all'indietro).

Dalla terza equazione $3z = 3$ ricaviamo $z = 1$;

nella seconda equazione sostituiamo il valore della z, otteniamo $y - 5 = -7$, e ricaviamo $y = -2$;

nella prima equazione sostituiamo i valori della z e della y, otteniamo $x + 4 + 6 = 11$, e ricaviamo $x = 1$.

Il sistema ha una ed una sola soluzione, $(1, -2, 1)$.

4. Di seguito descriviamo il metodo di eliminazione per la risoluzione di un qualsiasi sistema lineare di tre equazioni eq_1, eq_2, eq_3 in tre incognite x, y, z

$$\begin{array}{l} eq_1 \\ eq_2 \\ eq_3 \end{array} \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} a_1x + b_1y + c_1z & = & d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z & = & d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z & = & d_3 \end{array} \right.$$

L'operazione fondamentale consiste nel sommare ad una equazione un'altra equazione moltiplicata per un numero reale; ad esempio sommando alla equazione eq_2 l'equazione eq_1 moltiplicata per il numero reale m si ottiene l'equazione

$$eq_2 + meq_1 \qquad (a_2 + ma_1)x + (b_2 + mb_1)y + (c_2 + mc_1)z = d_2 + md_1.$$

Si noti che se $a_1 \neq 0$ allora prendendo $m = -a_2/a_1$ si ha un'equazione nella quale x non compare. Un'altra operazione che useremo consiste nello scambiare due equazioni. Un'ultima operazione che puo' essere utile consiste nel moltiplicare un'equazione per un numero reale diverso da zero.

Queste operazioni sono dette "operazioni elementari" sulle equazioni di un sistema. Si ha che ciascuna operazione elementare sulle equazioni di un sistema lascia invariato l'insieme delle soluzioni del sistema.

-I parte

Se in ciascuna delle tre equazioni il coefficiente della x e' zero, allora il sistema e' impossibile o indeterminato. [1]

Se in almeno una delle tre equazioni il coefficiente della x e' diverso da zero, allora eventualmente scambiando due equazioni possiamo fare in modo che cio' accada nella prima equazione. Possiamo allora usare la prima equazione per eliminare la x dalle altre due equazioni; sommiamo alla seconda equazione la prima equazione moltiplicata per $-a_2/a_1$, e sommiamo alla terza equazione la prima equazione moltiplicata per $-a_3/a_1$; otteniamo un sistema del tipo

$$\begin{array}{r} \\ eq_2 - (a_2/a_1)eq_1 \\ eq_3 - (a_3/a_1)eq_1 \end{array} \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} a_1x + b_1y + c_1z & = & d_1 \\ b'_2y + c'_2z & = & d'_2 \\ b'_3y + c'_3z & = & d'_3 \end{array} \right. \qquad con\ a_1 \neq 0$$

Se nella seconda e nella terza equazione il coefficiente della y e' zero, allora il sistema e' indeterminato o impossibile. [2]

Se nella seconda o nella terza equazione il coefficiente della y e' diverso da zero, allora eventualmente scambiando le due equazioni possiamo fare in modo che cio' accada nella seconda equazione. Possiamo allora usare la seconda equazione per eliminare la y dalla terza equazione; sommiamo alla terza equazione la seconda equazione moltiplicata per $-b'_3/b'_2$; otteniamo un sistema del tipo

$$\begin{array}{r} \\ \\ eq_3 - (b'_3/b'_2)eq_2 \end{array} \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} a_1x + b_1y + c_1z & = & d_1 \\ b'_2y + c'_2z & = & d'_2 \\ c''_3z & = & d''_3 \end{array} \right. \qquad con\ a_1, b'_2 \neq 0$$

Se nella terza equazione il coefficiente c''_3 della z e' uguale a zero, allora il sistema e' indeterminato o impossibile. [3]

---

[1] Infatti in tal caso il sistema diviene

$$0x + a_iy + c_iz = d_i, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Supponiamo che il sistema non sia impossibile. Cio' significa che il sistema ha almeno una soluzione (r^*, s^*, t^*), cioe'

$$0r^* + a_is^* + c_it^* = d_i, \qquad i = 1, 2, 3;$$

allora, per ogni $r \in \mathbb{R}$ si ha pure

$$0r + a_is^* + c_it^* = d_i, \qquad i = 1, 2, 3,$$

cioe' (r, s^*, t^*) e' soluzione del sistema. Cio' significa che il sistema e' indeterminato.

[2] Vale un argomento simile a quello della precedente nota.

[3] Cio' deriva dal fatto che la terza equazione e' indeterminata o impossibile.

Se nella terza equazione il coefficiente c_3'' della z e' diverso da zero, allora il sistema e' determinato e puo' essere risolto a partire dalla terza equazione per sostituzione all'indietro.

5. Al sistema

$$\begin{array}{ll} eq_1 & \\ eq_2 & \\ eq_3 & \end{array} \quad \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{cases}$$

corrisponde la matrice

$$\begin{array}{l} \underline{r}_1 \\ \underline{r}_2 \\ \underline{r}_3 \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{array}\right],$$

e alle operazioni elementari sulle equazioni eq_1, eq_2, eq_3 del sistema corrispondono delle operazioni elementari sulle righe $\underline{r}_1, \underline{r}_2, \underline{r}_3$ della matrice.

L'operazione elementare fondamentale consiste nel sommare ad una riga un'altra riga moltiplicata per un numero reale, un'altra operazione consiste nello scambiare due righe, e una terza operazione consiste nel moltiplicare una riga per un numero reale diverso da zero.

6. **Metodo di eliminazione, II, esempio**

E' dato il sistema lineare di tre equazioni nelle tre incognite x, y, z

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 3y + 4z = 5 \\ 4x + 9y + 16z = 25 \end{cases}.$$

Consideriamo la matrice associata al sistema

$$\begin{array}{l} \underline{r}_1 \\ \underline{r}_2 \\ \underline{r}_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \end{array}\right].$$

-I parte (eliminazione)

annulliamo il primo elemento della seconda riga sommando alla seconda riga (-2) volte la prima riga, e annulliamo il primo elemento della terza riga sommando alla terza riga (-4) volte la prima riga; otteniamo la matrice

$$\begin{array}{r} \\ \underline{r}_2 - 2\underline{r}_1 \\ \underline{r}_3 - 4\underline{r}_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 12 & 21 \end{array}\right];$$

annulliamo il secondo elemento dalla terza riga, sommando alla terza riga (-5) volte la seconda riga; otteniamo la matrice

$$\begin{array}{r} \\ \\ \underline{r}_3 := \underline{r}_3 - 5\underline{r}_2 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right].$$

Consideriamo il sistema associato alla matrice

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ \quad y+2z=3 \\ \qquad 2z=6 \end{cases}$$

-II parte (risoluzione per sostituzione all'insdietro)

Dalla terza equazione $2z=6$ ricaviamo $z=3$;

sostituiamo nella seconda equazione il valore della z, otteniamo $y+6=3$, e ricaviamo $y=-3$;

sostituiamo nella prima equazione i valori della z e della y, otteniamo $x-3+3=1$, e ricaviamo $x=1$.

Il sistema ha una ed una sola soluzione, $(3,-3,1)$.

7. Di seguito diamo una prima descrizione del metodo di eliminazione per la risoluzione di un sistema lineare di n equazioni eq_1, ..., eq_n in n incognite $x_1,\ldots,x_n$

$$\begin{array}{l} eq_1 \\ eq_2 \\ \vdots \\ eq_n \end{array} \qquad \begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}.$$

Nella prossima lezione ne daremo una descrizione piu' fine.

I passi fondamentali del metodo sono le operazioni elementari sulle equazioni del sistema:

-sommare ad una equazione un multiplo scalare di un'altra equazione:

$$eq_i := eq_i + m\, eq_j, \qquad (i,j=1,\ldots,n,\ i\neq j;\ m\in\mathbb{R})$$

-scambiare due equazioni:

$$eq_i := eq_j \ \ e \ \ eq_j := eq_i, \qquad (i,j=1,\ldots,n,\ i\neq j)$$

-moltiplicare una equazione per uno scalare diverso da zero

$$eq_i := m\, eq_i, \qquad (i=1,\ldots,n;\ m\in\mathbb{R},\ m\neq 0).$$

Il fatto fondamentale e' che

> ciascuna operazione elementare sulle equazioni di un sistema lascia invariato l'insieme delle soluzioni del sistema.

Informalmente, mediante operazioni elementari sulle equazioni, e' quasi sempre possibile trasformare il sistema dato in un sistema del tipo

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \cdots + a'_{1n}x_n = b'_1 \\ \qquad\qquad a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \ddots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad a'_{nn}x_n = b'_n \end{cases},$$

con $a'_{11}, a'_{22}, \ldots, a'_{nn} \neq 0$, che ha le stesse soluzioni del sistema dato.

Un sistema di questo tipo si dice "sistema triangolare non degenere (superiore)"; esso e' determinato, la soluzione del sistema si ottiene a partire dall'ultima equazione per sostituzione all'indietro.

Se il sistema e' abbastanza grande conviene passare dal sistema dato alla matrice associata

$$\begin{array}{c} \underline{r}_1 \\ \underline{r}_2 \\ \vdots \\ \underline{r}_n \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & b_n \end{array}\right].$$

I passi fondamentali del metodo sono allora le operazioni elementari sulle righe della matrice:

-sommare ad una riga un multiplo scalare di un'altra riga:

$$\underline{r}_i := \underline{r}_i + m\,\underline{r}_j, \qquad (i, j = 1, \ldots, n,\ i \neq j;\ m \in \mathbb{R})$$

-scambiare due righe:

$$\underline{r}_i := \underline{r}_j \ \ e \ \ \underline{r}_j := \underline{r}_i, \qquad (i, j = 1, \ldots, n,\ i \neq j)$$

-moltiplicare una riga per uno scalare diverso da zero

$$\underline{r}_i := m\,\underline{r}_i, \qquad (i = 1, \ldots, n;\ m \in \mathbb{R},\ m \neq 0).$$

Informalmente, mediante operazioni elementari sulle righe, e' quasi sempre possibile trasformare la matrice in una matrice del tipo

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a'_{11} & a'_{12} & \ldots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \ldots & a'_{2n} & b'_2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a'_{nn} & b'_n \end{array}\right],$$

con $a'_{11}, a'_{22}, \ldots, a'_{nn} \neq 0$. Una matrice di questo tipo si dice "matrice triangolare non degenere (superiore)"; ad essa corrisponde un sistema triangolare non degenere (superiore).