**Lezione del 24 novembre. Sistemi lineari**

1. Processo di eliminazione

   Input:

   -un sistema lineare di $n$ equazioni in $n$ incognite.

   Output:

   -la frase "il sistema e' determinato" e la soluzione del sistema; oppure

   -la frase "il sistema non e' determinato".

   Descrizione.

   L'input e' un sistema lineare

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

   che possiamo rappresentare con la matrice

$$\begin{array}{c} \underline{r}_1 \\ \vdots \\ \underline{r}_n \end{array} \left[ \begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array} \right].$$

   ( abbiamo indicato con $\underline{r}_i$ la $i-$ma riga della matrice. )

   -I passo.

   –I.1 se $a_{11} = a_{21} = \ldots = a_{n1} = 0$, allora il processo termina, e porge l'output "il sistema non e' determinato";

   –I.2 se almeno uno fra $a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n1}$ e' $\neq 0$, allora facciamo in modo che $a_{11} \neq 0$, eventualmente scambiando due righe; poi annulliamo $a_{21}, \ldots, a_{n1}$, sommando alla seconda, ..., $n-$ma riga opportuni multpli della prima riga; esplicitamente, queste operazioni di somma sono

$$\underline{r}_i := \underline{r}_i + \frac{-a_{i1}}{a_{11}}\underline{r}_1, \qquad (i = 2, \ldots, n).$$

   La matrice diventa

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array} \right].$$

   -II passo.

–II.1 se $a_{22} = a_{32} = \ldots = a_{n2} = 0$, allora il processo termina, e porge l'output "il sistema non e' determinato";

–II.2 se almeno uno fra $a_{22}, a_{32}, \ldots, a_{n2}$ e' $\neq 0$, allora facciamo in modo che $a_{22} \neq 0$, eventualmente scambiando due righe; poi annulliamo $a_{32}, \ldots, a_{n2}$, sommando alla terza, ..., $n-$ma riga opportuni multpli della seconda riga; esplicitamente, queste operazioni di somma sono

$$\underline{r}_i := \underline{r}_i + \frac{-a_{i2}}{a_{22}}\underline{r}_2, \qquad (i = 3, \ldots, n).$$

La matrice diventa

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ 0 & 0 & a_{33} & \ldots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3} & \ldots & a_{nn} & b_n \end{array}\right].$$

Si prosegue ...; si hanno due possibilita':

-il processo termina porgendo l'output "il sistema non e' determinato"; oppure

-il processo arriva al passo $n$ sottopasso 2, e la matrice diviene

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & \ldots & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & a_{nn} & b_n \end{array}\right].$$

con $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn} \neq 0$; il sistema corrispondente e'

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots\cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\quad a_{22}x_2 + \cdots\cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad \ddots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \ddots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

risolviamo il sistema per sostituzione all'indietro: ricaviamo il valore di $x_n$ dall'ultima equazione, sostituiamo questo valore nella penultima equazione e ricaviamo da essa il valore di $x_{n-1}$, ...

il processo porge l'output "il sistema e' determinato" e la soluzione del sistema.

N.B. In ciascun passo, il simbolo $a_{ij}$ indica l'elemento della $i-$ma riga e $j-$ma colonna della matrice cosi' come si e' venuto a determinare in quel punto, dunque indica numeri reali eventualmente diversi in passi diversi; analogamente per i simboli $b_i$ e $\underline{r}_i$.

Si possono dare stime del numero di operazioni richieste dal processo. [1]

2. Esempio 1.

E' dato il seguente sistema nelle incognite $x, y, z, u$

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + y + u = 6 \\ x + z + u = 9 \\ y + z + u = 12 \end{cases}.$$

La matrice del sistema e'

$$\begin{array}{c} \underline{r}_1 \\ \underline{r}_2 \\ \underline{r}_3 \\ \underline{r}_4 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 12 \end{array}\right].$$

I passo - Il primo elemento della prima riga e' $\neq 0$; annulliamo gli elementi al di sotto di esso, sommando alla seconda, terza, quarta riga opportuni multipli della prima riga; otteniamo

$$\begin{array}{c} \\ \underline{r}_2 - \underline{r}_1 \\ \underline{r}_3 - \underline{r}_1 \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 12 \end{array}\right].$$

II passo - Facciamo in modo che il secondo elemento della seconda riga si $\neq 0$, scambiando la seconda e quarta riga; otteniamo

$$\begin{array}{c} \\ \underline{r}_4 \\ \\ \underline{r}_2 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right].$$

[1] Una stima molto grezza. Nel caso generico, ci si aspetta che in ogni passo si presenti l'eventualita' descritta al secondo sottopasso, che il processo consista di $n$ passi, prima della risoluzione del sistema per sostituzione all'indietro. Si noti che: al primo passo si effettuano $n-1$ somme fra multipli della prima riga e le righe successive; al secondo passo si effettuano $n-2$ somme fra multipli della seconda riga e le righe successive; al terzo passo si effettuano $n-3$ somme fra multipli della terza riga e le righe successive; ... Dunque in totale si effettuano

$$(n-1) + (n-2) + (n-3) + \cdots + 1 = \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$$

operazioni di questo tipo.

poi eliminiamo gli elementi sotto il secondo elemento della seconda riga, sommando alla terza, quarta riga opportuni multipli della seconda riga; otteniamo

$$\begin{array}{c} \\ \\ \underline{r}_3+\underline{r}_2 \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 18 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right].$$

III passo- Il terzo elemento della terza riga e' $\neq 0$; annulliamo l'elemento al di sotto di esso, sommando alla quarta riga un opportuno multiplo della terza riga; otteniamo

$$\begin{array}{c} \\ \\ \\ \underline{r}_4+\underline{r}_3 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 21 \end{array}\right].$$

A questa matrice corrisponde il sistema

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ y+z+u=12 \\ z+2u=18 \\ 3u=21 \end{cases}$$

Risolviamo il sistema per sostituzione all'indietro:

$3u=21; \quad u=7$

$z+2\cdot 7=18; \quad z=4$

$y+4+7=12; \quad y=1$

$x+1+4=3; \quad x=-2.$

Il sistema e' determinato, ed ha soluzione $(-2,1,4,7)$.

3. Esempio 2.

E' dato il seguente sistema nelle incognite $x,y,z,u$

$$\begin{cases} x-2y+z=0 \\ -2x+y+u=0 \\ x+z-2u=0 \\ y-2z+u=0 \end{cases}.$$

La matrice del sistema e'

$$\begin{array}{c} \underline{r}_1 \\ \underline{r}_2 \\ \underline{r}_3 \\ \underline{r}_4 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

I passo - Il primo elemento della prima riga e' $\neq 0$; annulliamo gli elementi al di sotto di esso, sommando alla seconda, terza, quarta riga opportuni multipli della prima riga; otteniamo

$$\begin{array}{c} \\ \underline{r}_2+2\underline{r}_1 \\ \underline{r}_3-\underline{r}_1 \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

II passo - Il secondo elemento della seconda riga e' $\neq 0$, ma per semplificare i conti scambiamo la seconda e quarta riga; otteniamo

$$\begin{array}{c} \\ \underline{r}_4 \\ \\ \underline{r}_2 \end{array} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

poi eliminiamo gli elementi sotto il secondo elemento della seconda riga, sommando alla terza, quarta riga opportuni multipli della seconda riga; otteniamo

$$\begin{array}{c} \\ \\ \underline{r}_3-2\underline{r}_2 \\ \underline{r}_4+3\underline{r}_2 \end{array} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 0 \end{array}\right].$$

III passo- Il terzo elemento della terza riga e' $\neq 0$; annulliamo l'elemento al di sotto di esso, sommando alla quarta riga un opportuno multiplo della terza riga; otteniamo

$$\begin{array}{c} \\ \\ \\ \underline{r}_4+\underline{r}_3 \end{array} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

IV passo- Il quarto elemento della quarta riga e' 0; il sistema non e' determinato.

In effetti a questa matrice corrisponde il sistema

$$\begin{cases} x-2y+z=0 \\ y-2z+u=0 \\ 4z-4u=0 \\ 0=0 \end{cases}$$

che puo' essere risolto ricavando le incognite $x, y, z$ in funzione dell'incognita $u$ e lasciando libera $u$ di variare fra i numeri reali.

4. Esempio 1, variazione.

Consideriamo i sistemi nelle incognite $x, y, z, u$

$$\begin{cases} x+y+z=a \\ x+y+u=b \\ x+z+u=c \\ y+z+u=d \end{cases}.$$

che hanno la stessa matrice dei coefficienti del sistema dell'esempio 1, ma hanno termini noti arbitari $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

La matrice del sistema e'

$$\begin{array}{c} \underline{r}_1 \\ \underline{r}_2 \\ \underline{r}_3 \\ \underline{r}_4 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & a \\ 1 & 1 & 0 & 1 & b \\ 1 & 0 & 1 & 1 & c \\ 0 & 1 & 1 & 1 & d \end{array}\right].$$

Riportiamo di seguito i passi del processo di eliminazione, senza commenti.

I passo

$$\begin{array}{c} \\ \underline{r}_2 - \underline{r}_1 \\ \underline{r}_3 - \underline{r}_1 \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & -1 & 1 & b-a \\ 0 & -1 & 0 & 1 & c-a \\ 0 & 1 & 1 & 1 & d \end{array}\right].$$

II passo

$$\begin{array}{c} \\ \underline{r}_4 \\ \\ \underline{r}_2 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & 1 & d \\ 0 & -1 & 0 & 1 & c-a \\ 0 & 0 & -1 & 1 & b-a \end{array}\right].$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ \underline{r}_3 + \underline{r}_2 \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & 1 & d \\ 0 & 0 & 1 & 2 & d+c-a \\ 0 & 0 & -1 & 1 & b-a \end{array}\right].$$

III passo

$$\begin{array}{c} \\ \\ \\ \underline{r}_4 + \underline{r}_3 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & 1 & d \\ 0 & 0 & 1 & 2 & d+c-a \\ 0 & 0 & 0 & 3 & d+c+b-2a \end{array}\right].$$

A questa matrice corrisponde il sistema

$$\begin{cases} x+y+z &= a \\ y+z+u &= d \\ z+2u &= d+c-a \\ 3u &= d+c+b-2a \end{cases}$$

Il sistema e' determinato, per ogni valore dei termini noti iniziali $a, b, c, d$.

5. Esempio 2, variazione

   Consideriamo i sistemi lineari nelle incognite $x, y, z, u$

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ -2x + y + u = 0 \\ x + z - 2u = 0 \\ y - 2z + u = 0 \end{cases}$$

che hanno la stessa matrice dei coefficienti del sistema dell'esempio 2, ma hanno termini noti arbitari $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. La matrice del sistema e'

$$\begin{array}{c} \underline{r}_1 \\ \underline{r}_2 \\ \underline{r}_3 \\ \underline{r}_4 \end{array} \left[\begin{array}{rrrr|c} 1 & -2 & 1 & 0 & a \\ -2 & 1 & 0 & 1 & b \\ 1 & 0 & 1 & -2 & c \\ 0 & 1 & -2 & 1 & d \end{array}\right].$$

Riportiamo di seguito i passi del processo di eliminazione, senza commenti.

I passo

$$\begin{array}{c} \\ \underline{r}_2 + 2\underline{r}_1 \\ \underline{r}_3 - \underline{r}_1 \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 & a \\ 0 & -3 & 2 & 1 & b + 2a \\ 0 & 2 & 0 & -2 & c - a \\ 0 & 1 & -2 & 1 & d \end{array}\right].$$

II passo

$$\begin{array}{c} \\ \underline{r}_4 \\ \\ \underline{r}_2 \end{array} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & -2 & 1 & d \\ 0 & 2 & 0 & -2 & c - a \\ 0 & -3 & 2 & 1 & b + 2a \end{array}\right].$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ \underline{r}_3 - 2\underline{r}_2 \\ \underline{r}_4 + 3\underline{r}_2 \end{array} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & -2 & 1 & d \\ 0 & 0 & 4 & -4 & -2d + c - a \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 3d + b + 2a \end{array}\right].$$

III passo

$$\begin{array}{c} \\ \\ \\ \underline{r}_4 + \underline{r}_3 \end{array} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & -2 & 1 & d \\ 0 & 0 & 4 & -4 & -2d + c - a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d + c + b + a \end{array}\right].$$

IV passo- Il quarto elemento della quarta riga e' 0; il sistema non e' mai determinato.

In effetti a questa matrice corrisponde il sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x - 2y + z & = & a \\ y - 2z + u & = & d \\ 4z - 4u & = & -2d + c - a \\ 0 & = & d + c + b + a \end{array} \right.$$

che per $a + b + c + d \neq 0$ non ha soluzioni, e per $a + b + c + d = 0$ ha infinite soluzioni dipendenti da un parametro libero.

6. Gli esempi dei punti precedenti suggeriscono il seguente

   **Teorema 1** *Consideriamo la totalita' dei sistemi lineari di n equazioni in n incognite che hanno una fissata matrice dei coefficienti, e termini noti variabili. Allora si hanno due possibilita':*

   *-tutti i sistemi sono determinati, oppure*

   *-nessun sistema e' determinato.*

   Dimostrazione. Segue direttamente dal fatto che i passi del processo di eliminazione non dipendono dai termini noti, ma dipendono solo dalla matrice dei coefficienti del sistema.

   Si noti che sotto le ipotesi del teorema, l'affermazione "tutti i sistemi sono impossibili oppure nessun sistema e' impossibile" e' falsa, cosi' come e' falsa l'affermazione "tutti i sistemi sono indeterminati oppure nessun sistema e' indeterminato." Infatti nella discussione delle variazioni sull'esempio 2, fra i vari sitemi lineari che hanno la stessa matrice dei coefficienti, se ne trovano sia di impossibili che di indeterminati.

7. Consideriamo il sistema lineari nelle incognite $x, y, z$

   $$\left\{ \begin{array}{l} x + y = p \\ x + z = q \\ y + z = r \end{array} \right. ,$$

   dove i termini noti $p, q, r$ sono parametri in $\mathbb{R}$.

   Possiamo applichare a questo sistema il processo di eliminazione, iniziando col rappresentare il sistema non come in precedenza, ma con la matrice

   $$\begin{array}{c} \underline{r}_1 \\ \underline{r}_2 \\ \underline{r}_3 \end{array} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

   che ha in ciascuna colonna a sinistra del separatore i coefficienti di una incognita nelle varie equazioni, ed ha in ciascuna colonna a destra del separatore i coefficienti dei parametri nelle varie equazioni.

I passo

$$\begin{array}{c} \\ \underline{r}_2 - \underline{r}_1 \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

II passo

$$\begin{array}{c} \\ \\ \underline{r}_3 + \underline{r}_2 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Il sistema corrispondente e′

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + y & = & p \\ -y + z & = & -p + q \\ 2z & = & -p + q + r \end{array} \right. ,$$

e′ determinato, e si puo′ risolvere per sostituzione all′indietro. In realta′ anche la sostituzione all′indietro si puo′ svolgere sulla matrice, come mostrato di seguito.

$$\begin{array}{c} \\ \underline{r}_2 - \frac{1}{2}\underline{r}_3 \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

$$\begin{array}{c} \underline{r}_1 + \underline{r}_2 \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

$$\begin{array}{c} \\ -\underline{r}_2 \\ \frac{1}{2}\underline{r}_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right].$$

A questa matrice corrisponde il sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{2}(p + q - r) \\ y = \frac{1}{2}(p - q + r) \\ z = \frac{1}{2}(-p + q + r) \end{array} \right. ,$$

che porge le incognite in funzione dei termini noti del sistema dato.

Nota- ogni incognita e′ data da una funzione lineare nei termini noti.