Lezione del 28 novembre. Algebra delle matrici - Moltiplicazione

1. **Vettori, righe e colonne.**

   Sia n un intero positivo fissato. Ciascuna $n-$pla ordinata di numeri reali puo′ essere pensata come una matrice riga oppure come una matrice colonna; in realta′ conviene identificarla con una matrice colonna: indicata con un simbolo una $n-$pla ordinata di numeri reali, indicheremo con lo stesso simbolo la corrispondente matrice colonna e con il simbolo con un apice la corrispondente matrice riga:

   $$v = (v_1, \ldots, v_n), \qquad \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = v, \qquad [v_1 \ \ldots \ v_n] = v'$$

   Cosi′ come usiamo il termine "vettore" come sinonimo di "sequenza ordinata" (finita), allo stesso modo usiamo il termine "vettore riga" come sinonimo "matrice riga" e usiamo il termine "vettore colonna" come sinonimo "matrice colonna".

   L′insieme dei vettori riga viene indicato con $\mathbb{R}^{1\times n}$, e l′insieme dei vettori colonna viene indicato con $\mathbb{R}^{n\times 1}$. Come conseguenza dell′identificazione sopra descritta, talvolta scriveremo $\mathbb{R}^n$ al posto di $\mathbb{R}^{n\times 1}$ e scriveremo $(\mathbb{R}^n)'$ al posto di $\mathbb{R}^{1\times n}$.

2. **Prodotto di una riga per una colonna**

   Definiamo il prodotto di una riga a' di numeri reali per una colonna b di numeri reali, aventi lo stesso numero di componenti, come il numero reale ottenuto moltiplicando ciascuna componente di a' per la corrispondente componente di b, e poi sommando. Ad esempio

   $$[1\ 2\ 3] \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 = 32$$

   In generale, si ha

   $$\begin{aligned} a'b &= [a_1\ a_2\ \ldots\ a_n] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \\ &= a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_jb_j. \end{aligned}$$

La moltiplicazione di una riga per una colonna aventi diversi numeri di componenti non viene definita.

Questa operazione puo' essere utilizzata per rappresentare sinteticamente le equazioni lineari. L'equazione lineare

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

puo' essere scritta come

$$[a_1\ a_2\ \ldots\ a_n]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = b$$

e rappresentata sinteticamente come

$$a'x = b,$$

dove a' e' la riga dei coefficienti e x e' la colonna delle incognite.

3. **Matrici. Notazione**

Siano m ed n due interi positivi fissati.

Una matrice di tipo $m \times n$ su $\mathbb{R}$ e' una tabella di $m \cdot n$ numeri reali disposti su m righe ed n colonne; l'elemento della $i-$ma riga e $j-$ma colonna di una matrice si dice in breve "elemento di posto (i, j)" della matrice.

Le matrici di solito vengono indicate con lettere maiuscole; per indicare che una matrice A ha tipo $m \times n$ si usa scrivere $\underset{m\times n}{A}$. L'insieme delle matrici di tipo $m \times n$ su $\mathbb{R}$ si indica con

$$\mathbb{R}^{m\times n}.$$

La generica matrice A di tipo $m \times n$ viene solitamente rappresentata

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

oppure, piu' brevemente,

$$A = [a_{ij}]_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}},$$

o $A = [a_{ij}]$ quando il tipo e' chiaro dal contesto. Si noti che i e j non hanno alcun particolare significato, potrebbero essere sostituiti da altri due simboli, come h e k.

Noi useremo talvolta una notazione un po' diversa, suggerita dai linguaggi di alcune applicazioni per il calcolo come Matlab, o Octave.

Una volta scelto un simbolo, nel nostro caso A, per indicare una matrice, si usa il simbolo $A(i,j)$ per indicare l'elemento di posto (i,j) in A; si usa il simbolo $A(i,:)$ per indicare la riga $i-$ma di A, e si usa il simbolo $A(:,j)$ per indicare la colonna $j-$ma di A.

Ad esempio, per

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix},$$

si ha:

$$A(2,3) = 7, \qquad A(2,:) = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}, \qquad A(:,3) = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

4. **Prodotto di matrici**

Se il numero delle colonne di una matrice A e' uguale al numero delle righe di una matrice B, allora possiamo moltiplicare ciascuna riga di A per ciascuna colonna di B, ed organizzare questi prodotti in una tabella; otteniamo cosi' una matrice detta matrice prodotto (righe per colonne) di A per B, ed indicata con AB.

Ad esempio, si ha

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline 5 & 6 \\ \hline 7 & 8 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 1\cdot 1+2\cdot 4 & 1\cdot 2+2\cdot 5 & 1\cdot 3+2\cdot 6 \\ 3\cdot 1+4\cdot 4 & 3\cdot 2+4\cdot 5 & 3\cdot 3+4\cdot 6 \\ 5\cdot 1+6\cdot 4 & 5\cdot 2+6\cdot 5 & 5\cdot 3+6\cdot 6 \\ 7\cdot 1+8\cdot 4 & 7\cdot 2+8\cdot 5 & 7\cdot 3+8\cdot 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 19 & 26 & 33 \\ 29 & 40 & 51 \\ 39 & 54 & 69 \end{bmatrix}$$

In simboli, il prodotto di una matrice A di tipo $m \times n$ per una matrice B di tipo $n \times p$ e' la matrice AB di tipo $m \times p$

$$\underset{m\times n}{A} \cdot \underset{n\times p}{B} = \underset{m\times p}{AB}$$

data dalla tabella dei prodotti delle m righe di A per le p colonne di B : l'elemento di posto (i,j) in AB e' dato dal prodotto della riga $i-$ma di A per la colonna $j-$ma di B :

$$(AB)(i,j) = A(i,:)B(:,j), \qquad i = 1,\ldots,m,\ j = 1,\ldots,p.$$

Con riferimento agli elementi, si ha

$$\begin{aligned}(AB)(i,j) &= A(i,:)B(:,j) \\ &= [A(i,1)\ A(i,2)\ \ldots\ A(i,n)] \begin{bmatrix} B(1,j) \\ B(2,j) \\ \vdots \\ B(n,j) \end{bmatrix} \\ &= A(i,1)B(1,j) + A(i,2)B(2,j) + \cdots + A(i,n)B(n,j) \\ &= \sum_{h=1}^{n} A(i,h)B(h,j).\end{aligned}$$

Nella notazione usuale, la definizione di prodotto e' la seguente:
per $A = \left[a_{ij}\right]_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}$ e $B = \left[b_{ij}\right]_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,p}}$ si pone $AB = C$, dove $C = \left[c_{ij}\right]_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,p}}$ e' data da

$$c_{ij} \sum_{h=1}^{n} c_{i,h} b_{h,j}.$$

La moltiplicazione di matrici estende la moltiplicazione dei numeri reali, nel senso che le matrici di tipo $1 \cdot 1$ sono numeri reali, e la moltiplicazione di matrici di tipo $1 \cdot 1$ e' la moltiplicazione di numeri reali.

5. **Rappresentazione sintetica di sistemi lineari**

La moltiplicazione di matrici puo' essere utilizzata per rappresentare sinteticamente i sistemi lineari.

Ad esempio, il generico sistema lineare

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 &= b_3 \end{cases},$$

di 3 equazioni in 2 incognite puo' essere riscritto come

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix},$$

e il primo membro puo' essere fattorizzato nel prodotto della matrice dei coefficienti per la colonna delle incognite:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

In generale, il sistema lineare

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \vdots & \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

puo' essere scritto come

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

e rappresentato sinteticamente come

$$Ax = b,$$

dove A e' la matrice di tipo $m \times n$ dei coefficienti, x e' la colonna delle n incognite, e b e' la colonna degli m termini noti.

6. **Matrici unita'**

Le matrici quadrate che hanno 1 sulla diagonale e 0 altrove svolgono il ruolo del numero 1, e per questa ragione vengono dette "matrici unita' ". Esplicitamente, queste matrici sono

$$I_1 = [1], \qquad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \dots;$$

la matrice I_n unita' di ordine n e' la matrice quadrata di ordine n data da

$$(I_n)(i,j) = \begin{cases} 1 & se\ i = j \\ 0 & se\ i \neq j \end{cases} \qquad \forall i, j = 1, \dots, n.$$

La proprieta' di queste matrici e' che

$$I_m A = A = A I_n,$$

per ogni m, n e per ogni matrice A di tipo $m \times n$.

Verifichiamo la prima parte di questa proprieta' per $m = 2$ e $n = 3$. Per ogni matrice

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

di tipo 2×3 si ha

$$\begin{aligned} I_2 A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1a+0d & 1b+0e & 1c+0f \\ 0a+1d & 0b+1e & 0c+1f \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} = A. \end{aligned}$$

In generale, la proprieta' si puo' mostrare come segue. Da una parte si ha

$$(I_m A)\,(i,j) = \sum_{h=1,\dots,m} (I_m)(i,h)A(h,j) = (I_m)(i,i)A(i,j) = A(i,j),$$

per ogni i e j; dunque $I_m A = A$. La dimostrazione dall'altra parte e' analoga.

7. **Associativita'**

   Date tre matrici A, B, C di tipi rispettivamente $m \times n, n \times p, p \times q$, abbiamo due modi di moltiplicarle per ottenere una matrice, che sara' di tipo $m \times q$:

   $$(AB)C, \qquad A(BC).$$

   Ad esempio, per $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$, e $C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, si ha

   $$\begin{aligned} (AB)C &= \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \end{bmatrix} \\ A(BC) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} [5] = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

   Quello che abbiamo visto su questo esempio vale in generale. La moltiplicazione di matrici possiede la proprieta' associativa: comunque siano date tre matrici A, B, C di tipi rispettivamente $m \times n, n \times p, p \times q$, si ha

   $$(AB)C = A(BC).$$

   Questa affermazione si puo' dimostrare come segue. Da un lato si ha

   $$\begin{aligned} ((AB)C)(i,j) &= \sum_{h=1}^{p} (AB)(i,h)C(h,j) \\ &= \sum_{h=1}^{p} \left[\sum_{k=1}^{n} A(i,k)B(k,h) \right] C(h,j) = \sum_{h=1}^{p} \sum_{k=1}^{n} A(i,k)B(k,h)C(h,j); \end{aligned}$$

dall'altro si ha

$$
\begin{aligned}
(A(BC))(i,j) &= \sum_{h=1}^{n} A(i,h)(BC)(h,j) \\
&= \sum_{h=1}^{n} A(i,h)\left[\sum_{k=1}^{p} B(h,k)C(k,j)\right] = \sum_{h=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} A(i,h)B(h,k)C(k,j);
\end{aligned}
$$

si osservi che scambiando l'ordine delle sommatorie e rinominando gli indici di sommatoria un'espressione si trasforma nell'altra.

Potremo cosi' scrivere un prodotto di piu' matrici senza usare parentesi. Gli elementi

$$(ABC)\,(i,j), \qquad i = 1,\ldots,m;\ j = 1,\ldots,q,$$

della matrice ABC sono dati da

$$(ABC)(i,j) = \sum_{\substack{h=1,\ldots,n \\ k=1,\ldots,p}} A(i,h)B(h,k)C(k,j).$$

8. **Noncommutativita'**

Sappiamo che il prodotto di due numeri reali non cambia invertendo l'ordine dei fattori, cioe' la moltiplicazione di numeri reali possiede la proprieta' commutativa. Questa proprieta' non vale per la moltiplicazione di matrici, anzi in generale ci si aspetta che

$$AB \neq BA.$$

Puo' succedere che un prodotto esista e che l'altro prodotto non esista:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 8 & 10 \\ 12 & 15 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \textit{non esiste.}$$

Un esempio in cui i due prodotti sono definiti ma diversi:

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$