Lezione del 1 dicembre. Algebra delle matrici - matrice inversa

1. Per $n = 1$, l'insieme $\mathbb{R}^{n\times n}$ delle matrici quadrate di ordine n diventa l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali, e la moltiplicazione di matrici diventa la moltiplicazione di numeri reali.

   In $\mathbb{R}$, il numero 1 e' caratterizzato dalla proprieta' che il prodotto di 1 per un qualsiasi altro numero reale e' uguale a quell'altro numero reale:

   $1\,a = a = a\,1, \qquad \forall a \in \mathbb{R}.$

   L'inverso a^{-1} di un numero reale non nullo a e' caratterizzato dalla proprieta' che il prodotto del numero reale per il suo inverso e' uguale a 1:

   $a\,a^{-1} = 1 = a^{-1}\,a.$

   Un'equazione lineare

   $ax = b$

   nell'incognita reale x e' determinata se e solo se $a \neq 0$, e in tal caso l'unica soluzione si ottiene moltiplicando entrambi i membri per a^{-1} :

   $a^{-1}ax = a^{-1}b; \qquad 1x = a^{-1}b; \qquad x = a^{-1}b.$

   In questa lezione vedremo come queste nozioni e questi fatti si estendono al caso delle matrici quadrate di un qualsiasi ordine $n \geq 1$.

2. **Matrice inversa**

   Definizione 1 *Sia A una matrice quadrata di ordine n. Se esiste una matrice B quadrata di ordine n tale che*
   $$AB = I_n = BA,$$
   allora si dice che A e' invertibile, e che B e' una inversa di A

   Sia A una matrice quadrata di ordine n. Se una matrice B quadrata di ordine n si comporta da inversa sulla sinistra di A e se una matrice C quadrata di ordine n si comporta da inversa sulla destra di A, allora queste due matrici coincidono; infatti

   $$B = BI_n = B(AC) = (BA)C = I_nC = C.$$

   Dunque se A possiede un'inversa, questa e' unica; essa viene detta *la* matrice inversa di A, e viene denotata con

   $$A^{-1}.$$

   Nella discussione dei seguenti esempi usiamo un approccio diretto. Vedremo in seguito un metodo piu' efficiente per stabilire se una matrice e' invertibile o meno e, in caso affermativo, determinarne l'inversa.

-Esempio. Chiedersi se la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

possiede una inversa significa chiedersi se esiste una matrice B tale che

$$\begin{cases} AB = I_2 \\ BA = I_2 \end{cases}$$

Posto

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

la condizione che B sia inversa destra di A diviene

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

cioe'

$$\begin{bmatrix} a+c & b+d \\ -a+c & -b+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

cioe'

$$\begin{cases} a+c=1 \\ b+d=0 \\ -a+c=0 \\ -b+d=1 \end{cases}.$$

Questo sistema lineare di quattro equazioni in quatto incognite in realta' consiste di due sistemi di due equazioni in due incognite ciascuno. Dalle prima e terza equazione ricaviamo in modo univoco i valori delle incognite a, c :
$a = \frac{1}{2}, \quad c = \frac{1}{2};$
dalla seconda e dalla quarta equazione ricaviamo in modo univoco i valori delle incognite b, d :
$b = -\frac{1}{2}, \quad c = \frac{1}{2};$
Dunque c'e' una ed una sola matrice inversa destra di A, ed e'

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Ora, si verifica che B e' anche inversa sinistra di A :

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dunque B e' l'inversa di A :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

-Esempio. Ci chiediamo se la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

possiede una inversa. Una matrice

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

e' una inversa destra di A se

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

cioe'

$$\begin{cases} a + 3c = 1 \\ b + 3d = 0 \\ 2a + 6c = 0 \\ 2b + 6d = 1 \end{cases}.$$

Ora, la prima e la terza equazione di questo sistema sono incompatibili. Dunque A non possiede alcuna inversa destra, e a maggior ragione non possiede alcuna inversa.

Concludiamo questo paragrafo osservando due proprieta':

-se una matrice A e' invertibile, anche la sua inversa A^{-1} e' invertibile, e si ha

$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A;$$

infatti le uguaglianze

$$AA^{-1} = I_n \quad e \quad A^{-1}A = I_n$$

che significano rispettivamente che A^{-1} e' inversa destra e inversa sinistra di A significano anche rispettivamente che A e' inversa sinistra e inversa destra di A^{-1}.

-se due matrici A e B quadrate dello stesso ordine sono invertibili, allora anche la matrice AB loro prodotto e' invertibile, e l'inversa di AB e' il prodotto delle inverse, nell'ordine opposto:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1};$$

infatti:

$$\left(AB\right)\left(B^{-1}A^{-1}\right) = A\left(BB^{-1}\right)A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$$
$$\left(B^{-1}A^{-1}\right)\left(AB\right) = B^{-1}\left(A^{-1}A\right)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n.$$

3. **Matrice inversa e sistemi lineari**

Teorema 1 *Sia A una matrice A quadrata di ordine n. Se A e' invertibile, allora ciascun sistema lineare di n equazioni in n incognite con matrice dei coefficienti A*

$$Ax = b \qquad (b \in \mathbb{R}^n)$$

e' determinato; inoltre, la sua soluzione e' data da

$$x = A^{-1}b.$$

Dimostrazione. Dal fatto che A^{-1} e' inversa sinistra di A, ricaviamo

$$\begin{array}{rcl} Ax & = & b \\ A^{-1}\left(Ax\right) & = & A^{-1}b \\ \left(A^{-1}A\right)x & = & A^{-1}b \\ I_nx & = & A^{-1}b \\ x & = & A^{-1}b. \end{array}$$

Usando il fatto che A^{-1} e' inversa destra di A, mostriamo che questa e' davvero una soluzione:

$$A\left(A^{-1}b\right) = \left(AA^{-1}\right)b = I_nb = b.$$

cvd

-Esempio. Sappiamo che la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

e' invertible e che

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Per il Th. precedente, possiamo dire che ciascuno dei sistemi $Ax = b$ cioe'

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & = & b_1 \\ -x_1 + x_2 & = & b_2 \end{cases}$$

e' determinato, e la sua soluzione e' data da $x = A^{-1}b$, cioe'

$$\begin{cases} x_1 & = & \frac{1}{2}b_1 - \frac{1}{2}b_2 \\ x_2 & = & \frac{1}{2}b_1 + \frac{1}{2}b_2 \end{cases}.$$

Vale anche il viceversa del Teorema precedente:

Teorema 2 *Sia A una matrice A quadrata di ordine n. Se ciascun sistema lineare di n equazioni in n incognite con matrice dei coefficienti A*

$$Ax = b \qquad (b \in \mathbb{R}^n)$$

e' determinato, allora A e' invertibile; inoltre in tal caso esiste una matrice C indipendente da b tale che la sua soluzione sia data da

$$x = Cb,$$

e si ha $A^{-1} = C$.

-Esempio. Ci chiediamo se la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

e' invertible e in tal caso quale sia la sua inversa.

Consideriamo il generico sistema lineare che ha A come matrice dei coefficienti

$$\begin{cases} 5x + 4y &= p \\ 3x + 2y &= q \end{cases} \qquad (p, q \text{ parametri } \in \mathbb{R}).$$

Applichiamo a questo sistema il processo di eliminazione direttamente sul sistema.

La parte di eliminazione porge il sistema

$$\begin{cases} 5x + 4y &= p \\ -\frac{2}{5}y &= -\frac{3}{5}p + q \end{cases},$$

che e' determinato. Dunque la matrice A e' invertibile.

Risolviamo il sistema per eliminazione all'indietro

$$\begin{cases} 5x + 4y &= p \\ y &= \frac{3}{2}p - \frac{5}{2}q \end{cases},$$

$$\begin{cases} 5x &= -5p + 10q \\ y &= \frac{3}{2}p - \frac{5}{2}q \end{cases},$$

arriviamo al sistema-soluzione

$$\begin{cases} x &= -1p + 2q \\ y &= \frac{3}{2}p - \frac{5}{2}q \end{cases},$$

Per il teorema precedente si ha

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}.$$

Per le matrici quadrate di ordine maggiore di 2 conviene operare direttamente e solamente su matrici. Descriviamo di seguito un metodo, detto algoritmo di Gauss-Jordan, per stabilire se una matrice A quadrata di ordine n e' invertibile e in caso affermativo determinarne l'inversa.

Si considera la matrice di tipo $n \times (2n)$

$$\left[\ A \mid I_n\ \right] \tag{1}$$

ottenuta affiancando alla matrice A la matrice unita' I_n, e si applica a questa matrice il processo di eliminazione. Si hanno cue casi

-il processo termina prima del passo $n-$mo; in questo caso la matrice A non e' invertibile;

-il processo giunge al passo $n-$mo porgendo una matrice

$$\left[\ T \mid B\ \right] \tag{2}$$

con T matrice triangolare nondegenere; in questo caso la matrice A e' invertibile, inoltre continuando ad applicare operazioni elementari sulle righe si puo' trasformare (2) in una matrice del tipo

$$\left[\ I_n \mid C\ \right] \tag{3}$$

e si ha $C = A^{-1}$.

4. **Prodotto di una matrice per uno scalare**

Data una matrice A di tipo $m \times n$, e dato uno scalare $r \in \mathbb{R}$, moltiplicando r per ciascun elemento di A si ottiene una nuova matrice di tipo $m \times n$, detta matrice prodotto dello scalare r per la matrice A, ed indicata con rA. In simboli, la matrice rA e' definita elemento per elemento da

$$(rA)(i,j) = rA(i,j) \qquad i = 1,\ldots,m;\ j = 1,\ldots,n.$$

In modo analogo si definisce la matrice prodotto della matrice A per lo scalare r, indicata con Ar. Chiaramente si ha

$$rA = Ar.$$

La moltiplicazione di una matrice A di tipo $m \times n$ per uno scalare r puo' essere realizzata come la premoltiplicazione di A per la matrice rI_m oppure come la postmoltiplicazione di A per la matrice rI_n :

$$rA = (rI_m)A = A(rI_n).$$

Per questa ragione, le matrici rI vengono dette *matrici scalari*.

Una matrice scalare rI_n e' invertibile se e solo se $r \neq 0$, e in tal caso si ha

$$(rI_n)^{-1} = r^{-1}I_n.$$

5. Per le matrici quadrate del secondo ordine si ha

   Proposizione 1 *Una matrice*

   $$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

   e' invertibile se e solo se $ad - cb \neq 0$, e in tal caso

   $$A^{-1} = \frac{1}{ad - cb} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

   Il fatto che per $ad - bc \neq 0$ la matrice A ammetta come inversa la matrice data dalla formula si puo' verificare direttamente, e la verifica e' lasciata al lettore. Il fatto che per $ad - bc = 0$ la matrice A non sia invertibile e' un poco piu' sottile, ci torneremo piu' avanti.

6. **Potenze**

   Sia A una matrice quadrata di ordine n. Per ogni intero relativo $p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$ la potenza $p-$ma della matrice A e' definita da

   $$A^p = \begin{cases} A\,A\,\cdots\,A \quad (p \text{ volte}) & \text{per } p > 0 \\ I_n & \text{per } p = 0 \\ A^{-1}\,A^{-1}\,\cdots\,A^{-1} \quad (-p \text{ volte}) & \text{per } p < 0 \end{cases};$$

   le potenze con esponente negativo sono definite solo per matrici invertibili.

   Valgono le usuali proprieta' delle potenze:

   $$\begin{aligned} &A^p A^q = A^{p+q}; \\ &(A^p)^q = A^{pq}; \\ &(AB)^p = A^p B^p \qquad (\textit{sotto la condizione } AB = BA). \end{aligned}$$

   Esempio:

   $$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-2} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$