Lezione del 3 dicembre. Sistemi lineari, metodo di eliminazione di Gauss. Somma di matrici. Sistemi lineari omogenei.

1. Nelle lezioni precedenti abbiamo considerato i sistemi di equazioni lineari in una, due, e tre incognite e ne abbiamo descritto il significato geometrico. Poi abbiamo considerato equazioni lineari in n incognite, sistemi di n equazioni lineari in n incognite, ed abbiamo descritto il metodo di eliminazione per la loro risoluzione.

   Di seguito consideriamo sistemi di m equazioni lineari in n incognite, e descriviamo una variante del metodo di eliminazione per la loro risoluzione.

2. Esempio.

   Consideriamo il sistema nelle incognite x, y, z, u

$$\begin{cases} 2x - 3y + 6z - 3u &= p \\ -4x + 6y - 4z + 3u &= q \\ 6x - 9y + 2z - 3u &= r \end{cases}, \qquad (p, q, r \text{ parametri } \in \mathbb{R}).$$

   Al sistema corrisponde la matrice

$$\begin{array}{c} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{array} \left[\begin{array}{rrrr|l} 2 & -3 & 6 & -3 & p \\ -4 & 6 & -4 & 3 & q \\ 6 & -9 & 2 & -3 & r \end{array}\right].$$

   -I parte (eliminazione)

   -I passo; il primo elemento della prima riga e' $\neq 0$, pssiamo annullare i primi elementi della seconda e terza riga ...

$$\begin{array}{c} \\ r_2 + 2r_1 \\ r_3 - 3r_1 \end{array} \left[\begin{array}{rrrr|l} 2 & -3 & 6 & -3 & p \\ 0 & 0 & 8 & -3 & q + 2p \\ 0 & 0 & -16 & 6 & r - 3p \end{array}\right].$$

   -II passo; i secondi elementi della seconda e terza riga sono nulli; il terzo elemento della seconda riga e' $\neq 0$, pssiamo annullare il terzo elemento della terza riga ...

$$\begin{array}{c} \\ \\ r_3 + 2r_1 \end{array} \left[\begin{array}{rrrr|l} 2 & -3 & 6 & -3 & p \\ 0 & 0 & 8 & -3 & q + 2p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r + 2q + p \end{array}\right].$$

   -II parte (risoluzione per sostituzione all'indietro) Allla matrice corrisponde il sistema

$$\begin{cases} 2x - 3y + 6z - 3u &= p \\ 8z - 3u &= q + 2p \\ 0 &= r + 2q + p \end{cases}.$$

Per $r+2q+p \neq 0$, la terza equazione e' impossibile, e a maggior ragione il sistema e' impossibile. Per $r+2q+p=0$, la terza equazione e' identicamente soddisfatta, e il sistema si riduce alle prime due equazioni, che sono del tipo

$$\begin{cases} 2x-3y+6z-3u &= p' \\ 8z-3u &= q' \end{cases}.$$

Dalla seconda equazione ricaviamo l'incognita z (la prima che compare in essa) in funzione dell'incognita u; nella prima equazione sostituiamo alla z questa espressione in funzione di u e ricaviamo l'incognita x (la prima che compare in essa) in funzione delle incognite y e u; lasciamo le incognite y e u libere di assumere qualsiasi valore in $\mathbb{R}$.

Per esempio, se $p'=q'=0$, si ha

$8z-3u=0; \quad z=\frac{3}{8}u$

$2x-3y+6(\frac{3}{8}u)-3u=0; \quad x=\frac{3}{2}y+\frac{3}{8}u;$

e la soluzione generale del sistema e'

$$x=\frac{3}{2}y+\frac{3}{8}u; \quad y= \ qualsiasi; \quad z=\frac{3}{8}u; \quad u= \ qualsiasi.$$

3. Descrizione in generale.

E' dato un sistema lineare $Ax=b$ di m equazioni in n incognite $x_1,\ldots,x_n$. Si passa alla matrice del sistema $[A|b]$ che ha tipo $m\times(n+1)$.

La parte principale del processo si svolge sulla matrice $[A|b]$, e la trasforma mediante operazioni elementari sulle righe in una matrice $[S|c]$ nella quale S e' una "matrice a scala", che ha la seguente proprieta'

> il primo elemento non nullo della I riga ha strettamente alla sua destra il primo elemento non nullo della II riga che a sua volta ha strettamente alla sua destra il primo elemento non nullo della III riga, che a sua volta ..., ed infine si hanno eventualmente delle righe nulle

Dalla matrice a scala $[S|c]$ cosi' ottenuta si passa al sistema corrispondente $Sx=c$. Il sistema $Sx=c$ e' un "sistema a scala", che ha la seguente proprieta'

> la prima incognita che compare nella I equazione precede strettamente la prima incognita che compare nella II equazione che a sua volta precede strettamente la prima incognita che compare nella III equazione, che a sua volta ..., ed infine si hanno eventualmente delle equazioni in cui non compare alcuna incognita

E′ immediato riconoscere se un sistema di questo tipo e′ impossibile, determinato o indeterminato, e c′e′ un modo canonico per risolverlo. Precisamente:

-si trascurano le eventuali equazioni del tipo $0x_1 + \cdots + 0x_n = 0$;

-se c′e′ un′equazione del tipo $0x_1 + \cdots + 0x_n = b$ con $b \neq 0$, allora il sistema e′ impossibile;

-se in ogni equazione compare almeno un′incognita, allora si risolve il sistema rispetto alle incognite che compaiono per prime nelle varie equazioni; se non ci sono altre incognite, il sistema e′ determinato; se ci sono altre incognite, queste vengono lasciate libere, e il sistema e′ indeterminato.

4. **Sistemi lineari con meno equazioni che incognite**

   Il generale, ci si aspetta che un sistema lineare di m equazioni in n incognite sia indeterminato, determinato o impossibile secondo che m sia minore, uguale o maggiore di n. Poche pero′ sono le affermazioni che si possono fare a priori con certezza. La principale e′ data dalla seguente

   Proposizione 1 *Sia dato un sistema lineare di m equazioni in n incognite. Se $m < n$ allora il sistema e′ indeterminato, con soluzioni che dipendono da almeno $n - m(> 0)$ parametri liberi, oppure e′ impossibile.*

   Dimostrazione. Possiamo pensare che il sistema lineare di m equazioni in n incognite dato sia un sistema a scala. Se un tale sistema ha soluzioni, allora e′ composto da un certo numero $p \leq m$ di equazioni in cui compare qualche incognita, e da altre equzioni del tipo $0x_1 + \cdots + 0x_n = 0$ che possono essere trascurate; dunque il sistema si puo′ risolvere rispetto alle p incognite che compaiono per prime nella prima, seconda, ..., $p-$ma equazione. Ora, essendo $p \leq m < n$ si ha $p < n$, e dunque esiste qualche altra incognita, che puo′ essere lasciata libera, e il sistema e′ indeterminato.

5. **Sistemi lineari omogenei**

   Un sistema lineare di m equazini in n incognite nel quale tutti gli m termini noti sono nulli si dice ″omogeneo″. Un tale sistema possiede sempre almeno una soluzione: il vettore nullo $0 \in \mathbb{R}^n$; questa soluzione si dice ″soluzione banale″ del sistema.

   Per questi sistemi la proposione del punto precedente diviene

   Proposizione 2 *Sia dato un sistema lineare omogeneo di m equazioni in n incognite. Se $m < n$ allora il sistema e′ indeterminato, con soluzioni che dipendono da almeno $n - m(> 0)$ parametri liberi; in particolare, il sistema possiede qualche soluzione non banale.*

6. Ci accingiamo ora ad estendere la geometria dei sistemi lineari dal caso di due e tre incognite al caso di un numero finito qualsiasi di incognite. In questo punto ricordiamo alcuni fatti sulle equazioni lineari in due e tre incognite, nei punti successivi introduciamo l'operazione di somma di matrici, e infine, usando la presentazione matriciale dei sistemi e le proprieta' delle operazioni sulle matrici, estendiamo questi fatti al caso generale.

   -Equazioni lineari in due incognite.

   Identifichiamo, mediante un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, l'insieme $\mathbb{R}^2$ con l'insieme dei punti del piano. Abbiamo descritto il fatto che ciascuna equazione lineare effettiva in due incognite x_1, x_2

$$ax_1 + bx_2 = c, \qquad (a \text{ e } b \text{ non entrambi nulli})$$

   ha un insieme delle soluzioni del tipo

$$x = tv + p, \qquad (t \text{ parametro variabile in } \mathbb{R})$$

   dove $v \in \mathbb{R}^2$ e' diverso dal vettore nullo, e $p \in \mathbb{R}^2$; questo insieme e' l'insieme dei punti di una retta, la retta passante per il punto p e parallela alla retta passante per l'origine O e il punto v; quest'ultima retta a sua volta e' l'insieme dei punti

$$x = tv \qquad (t \text{ parametro variabile in } \mathbb{R});$$

   si verifica che questo insieme e' l'insieme delle soluzioni dell'equazione lineare omogenea

$$ax_1 + bx_2 = 0.$$

   -Equazioni lineari in tre incognite.

   Identifichiamo, mediante un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, l'insieme $\mathbb{R}^3$ con l'insieme dei punti dello spazio. Abbiamo descritto il fatto che ciascuna equazione lineare effettiva in tre incognite x_1, x_2, x_3

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = d, \qquad (a,\ b,\ \text{e } c \text{ non tutti nulli})$$

   ha un insieme delle soluzioni del tipo

$$x = ru + sv + p, \qquad (r, s \text{ parametri variabili in } \mathbb{R}),$$

   dove $u, v \in \mathbb{R}^3$ non sono proporzionali, e $p \in \mathbb{R}^3$; questo insieme e' l'insieme dei punti di un piano, il piano passante per il punto p e parallelo al piano passante per l'origine O e i punti u, v; quest'ultimo piano a sua volta e' l'insieme dei punti

$$x = ru + sv \qquad (r, s \text{ parametri variabili in } \mathbb{R});$$

   si verifica che questo insieme e' l'insieme delle soluzioni dell'equazione lineare omogenea

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0.$$

7. **Algebra delle matrici. Somma di matrici.**

Siano m ed n due interi positivi fissati. Date due matrici A, B di tipo $m \times n$, sommando a ciascun elemento di A il corrispondente elemento di B, si ottiene una nuova matrice di tipo $m \times n$, detta matrice somma di A e B ed indicata con $A + B$. Esempio:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 9 \\ 8 & 12 \end{bmatrix}.$$

In simboli, la matrice $A + B$ e' definita elemento per elemento ponendo

$$(A + B)(i, j) = A(i, j) + B(i, j), \qquad i = 1, \ldots, m, \ j = 1, \ldots, n.$$

La somma di due matrici di tipi diversi non e' definita.

L'addizione di matrici e' un'operazione associativa e commutativa. La matrice di tipo $m \times n$ avente tutti gli elementi nulli viene detta matrice nulla ed indicata con $\underset{m \times n}{0}$. Questa matrice e' caratterizzata dalla proprieta'

$$A + \underset{m \times n}{0} = A = \underset{m \times n}{0} + A, \qquad (\textit{per ogni } A \in R^{m \times n}).$$

Per ogni matrice A di tipo $m \times n$, prendendo di ciascun elemento di A il suo opposto, si ottiene una nuova matrice di tipo $m \times n$, detta matrice opposta di A ed indicata con $-A$. In simboli, la matrice $-A$ e' definita elemento per elemento ponendo

$$(-A)(i, j) = -A(i, j), \qquad i = 1, \ldots, m, \ j = 1, \ldots, n.$$

Questa matrice e' caratterizzata dalla proprieta'

$$A + (-A) = \underset{m \times n}{0} = (-A) + A.$$

Nel caso $m = n = 1$ abbiamo l'usuale somma di numeri reali.

8. **Proprieta' distributive**

L'operazione di moltiplicazione di matrici possiede le proprieta' distributive sinistra e destra rispetto all'addizione di matrici:

$$\begin{aligned} (A + B)C &= AC + BC \\ B(C + D) &= BC + BD \end{aligned}$$

per ogni A, B matrici di tipo $m \times n$ e C, D matrici di tipo $n \times p$.

Dimostriamo la proprieta' distributiva sinistra della moltiplicazione rispetto all'addizione di matrici. Per ogni $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, p$, da un lato si ha

$$\begin{aligned} ((A+B)C)(i,j) &= \sum_{h=1}^{n} (A+B)(i,h)C(h,j) \\ &= \sum_{h=1}^{n} (A(i,h) + B(i,h))C(h,j), \end{aligned}$$

e dall'altro si ha

$$\begin{aligned} (AC+BC)(i,j) &= (AC)(i,j) + (BC)(i,j) \\ &= \sum_{h=1}^{n} A(i,h)C(h,j) + \sum_{h=1}^{n} B(i,h)C(h,j); \end{aligned}$$

la forma finale della prima espressione si puo' trasformare nella forma finale della seconda espressione, applicando la proprieta' distributiva (della moltiplicazione rispetto all'addizione di numeri reali) a ciascun addendo e spezzando la sommatoria.

9. **Espressioni matriciali**

   Il calcolo delle espressioni matriciali puo' essere sviluppato in analogia col calcolo delle usuali espressioni algebriche, ma solo fino a un certo punto. Innanzitutto sia la moltiplicazione che l'addizione di matrici non sono sempre definite, poi la moltiplicazione non possiede la proprieta' commutativa.

   Cio' comporta, ad esempio, che l'identita'

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

   valida per a, b variabili reali, non lo e' piu' per variabili matriciali. Infatti per A, B matrici quadrate dello stesso ordine si ha

$$(A+B)(A-B) = A(A-B) + B(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2,$$

   e AB e BA in generale non si elidono.

10. **Sistemi lineari omogenei e sistemi lineari.**

    A ciascun sistema lineare di m equazioni in n incognite e' associato un sistema lineare omogeneo di m equazioni in n incognite: quello che ha la stessa matrice dei coefficienti. In simboli: a ciascun sistema $Ax = b$ (A matrice $m \times n$, $b \in \mathbb{R}^m$) e' associato il sistema $Ax = 0$ ($0 \in \mathbb{R}^m$).

    Proposizione 3 *Sia $Ax = b$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite che abbia qualche soluzione, e sia $u^* \in \mathbb{R}^n$ una di esse. Allora la soluzione generale del sistema e' del tipo*

$$u^* + v, \tag{1}$$

    dove v varia fra le soluzioni del sistema lineare omogeneo $Ax = 0$ associato al sistema dato.

Dimostrazione. Dobbiamo provare che tutti i vettori del tipo (1) sono soluzioni del sistema e viceversa che tutte le soluzioni del sistema sono del tipo (1). Di seguito dimostriamo le due affermazioni.

-1. I fatti che u^* sia una soluzione del sistema $Ax = b$ e che v sia una soluzione del sistema $Ax = 0$ significano che

$$Au^* = b \ \ e \ \ Av = 0;$$

sommando membro a membro si ottiene

$$Au^* + Av = b + 0, \quad cioe' \quad A(u^* + v) = b,$$

e cio′ significa che $u^* + v$ e′ una soluzione del sistema $Ax = b$.

-2. I fatti che u e u^* siano soluzioni del sistema $Ax = b$ significano che

$$Au = b \ \ e \ \ Au^* = b;$$

sottraendo membro a membro si ottiene

$$Au - Au^* = b - b, \quad cioe' \quad A(u - u^*) = 0,$$

e cio′ significa che $u - u^*$ e′ una soluzione del sistema $Ax = 0$. Allora u ha la scrittura

$$u = u^* + (u - u^*),$$

che e′ del tipo (1).