Lezione del 5 dicembre. Sottospazi vettoriali.

1. **Sottospazi vettoriali.**

   Identificato lo spazio con $\mathbb{R}^3$ tramite un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, consideriamo un piano passante per l'origine del sistema di riferimento. Osserviamo che:

   -per ogni due punti del piano, le due terne corrispondenti in $\mathbb{R}^3$ hanno per somma una terna cui corrisponde ancora un punto del piano (infatti tale punto e' un vertice di un parallelogramma che ha gli altri tre vertici sul piano);

   -per ogni numero reale ed ogni punto del piano, il prodotto del numero reale per la terna corrispondente al punto in $\mathbb{R}^3$ e' una terna cui corrisponde ancora un punto del piano (infatti tale punto sta su una retta che ha due punti sul piano).

   In sintesi, il sottinsieme di $\mathbb{R}^3$ costituito dalle terne associate ai punti del piano e' chiuso rispetto alle operazioni di somma di terne e di prodotto di numeri reali per terne.

   Inoltre, tale insieme si potra' descrivere come

   1- insieme delle soluzioni di un'equazione lineare omogenea effettiva $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ (con $a, b, c \in \mathbb{R}$ non tutti nulli e $d \in \mathbb{R}$);

   2- insieme delle combinazioni lineari $ru + sv$ di due vettori $u, v \in \mathbb{R}^3$ (nessuno dei due multiplo scalare dell'altro) con coefficienti r, s che variano liberamente in $\mathbb{R}$.

   Queste considerazioni suggeriscono la seguente definizione, e vengono estese dalle seguenti proposizioni.

   Definizione 1 *Un sottinsieme $V \subseteq \mathbb{R}^n$, con $V \neq \emptyset$, si dice sottospazio di $\mathbb{R}^n$ se e solo se*

   1- $u + v \in V$, per ogni $u, v \in V$;

   2 - $ru \in V$, per ogni $u \in V$ ed $r \in \mathbb{R}$;

   in breve, si esprimono queste proprieta' dicendo che V e' chiuso rispetto alle operazioni di somma di vettori e di prodotto di scalari per vettori.

   Un sottospazio V di $\mathbb{R}^n$, con le operazioni di somma di vettori e di prodotto scalari per vettori e' dunque uno spazio vettoriale a se', nel senso della definizione generale.

2. **Esempi.**

   1-Identificato lo spazio con $\mathbb{R}^3$ tramite un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, si ha che i sottospazi di $\mathbb{R}^3$ sono tutti e soli i sottinsiemi di $\mathbb{R}^3$ che sono identificati con

-l'origine O del sistema di riferimento;

-una retta passante per O;

-un piano passante per O;

-l'intero spazio.

2- L'insieme $\{0\}$ costituito dal solo vettore nullo $0 \in \mathbb{R}^n$ e' il piu' piccolo sottospazio di $\mathbb{R}^n$; il piu' grande sottospazio di $\mathbb{R}^n$ e' l'insieme $\mathbb{R}^n$ stesso.

3- Sia u un vettore in $\mathbb{R}^n$. L'insieme dei multipli scalari di u e' un sottospazio di $\mathbb{R}^n$. Infatti, la somma di due qualsiasi multipli scalari di u e' ancora un multiplo scalare di u :

$$r_1 u + r_2 u = (r_1 + r_2)u;$$

e il prodotto di un qualsiasi scalare per un qualsiasi multiplo scalare di u e' ancora un multiplo scalare di u :

$$s(ru) = (sr)u.$$

-4. Siano u, v due vettori in $\mathbb{R}^n$. L'insieme delle combinazioni lineari di u, v e' un sottospazio di $\mathbb{R}^n$. Infatti, la somma di due qualsiasi combinazioni lineari di u, v e' ancora una combinazione lineare di u, v :

$$r_1 u + s_1 v + r_2 u + s_2 v = (r_1 + r_2)u + (s_1 + s_2)v;$$

e il prodotto di un qualsiasi scalare per una qualsiasi combinazione lineare di u e v e' ancora una combinazione lineare di u, v :

$$t(ru + sv) = (tr)u + (ts)v.$$

5- L'insieme delle soluzioni di una equazione lineare omogenea in n incognite $a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0$, in breve $a'x = 0$, e' un sottospazio di $\mathbb{R}^n$.

Infatti, la somma di due qualsiasi vettori $u, v \in \mathbb{R}^n$ soluzioni dell'equazione e' ancora una soluzione dell'equazione:

$$a'(u + v) = a'u + a'v = 0 + 0 = 0;$$

e il prodotto di un qualsiasi scalare per un qualsiasi vettore $u \in \mathbb{R}^n$ soluzione dell'equazione e' ancora una soluzione dell'equazione:

$$a'(su) = s(a'u) = s0 = 0.$$

3. **Sottospazi, sistemi lineari omogenei, combinazioni lineari.**

   Un primo modo fondamentale nel quale si presentano i sottospazi di $\mathbb{R}^n$ e' dato dalla

Proposizione 1 *L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo in n incognite e' un sottospazio di* $\mathbb{R}^n$.

Dimostrazione. Sia $Ax = 0$ (A di tipo $m \times n$, $0 \in \mathbb{R}^m$) un sistema lineare omogeneo di m equazioni in n incognite. L'insieme delle sue soluzioni e'

$$\{u \in \mathbb{R}^n : \ Au = 0\};$$

non e' vuoto in quanto contiene il vettore nullo $0 \in \mathbb{R}^n$.

-Chiusura rispetto alla somma di vettori. Siano $u, v \in \mathbb{R}^n$ due soluzioni del sistema $Ax = 0$; cio' significa che

$$Au = 0, \ \ e \ \ Av = 0;$$

sommando le due ugualglianze si ha

$$Au + Av = 0 + 0, \quad da\ cui \quad A(u + v) = 0;$$

cio' significa che $u + v$ e' una soluzione del sistema.

-Chiusura rispetto al prodotto scalari per vettori. Sia $u \in \mathbb{R}^n$ una soluzione del sistema $Ax = 0$, e sia $r \in \mathbb{R}$; si ha $Au = 0$, e moltiplicando per r entrambi i membri si ottiene $r(Au) = r0$, cioe' $A(ru) = 0$; dunque ru e' una soluzione del sistema.

Un secondo modo fondamentale nel quale si presentano i sottospazi di $\mathbb{R}^n$ e' dato dalla

Proposizione 2 *L'insieme delle combinazioni lineari di un numero finito di vettori di* $\mathbb{R}^n$ *e' un sottospazio di* $\mathbb{R}^n$.

Dimostrazione. Siano $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$; consideriamo l'insieme delle loro combinazioni lineari

$$\{r_1v_1 + \cdots + r_mv_m; \ r_i \in \mathbb{R}\};$$

non e' vuoto in quanto contiene $0 \in \mathbb{R}^n$.

-Chiusura rispetto alla somma di vettori. Siano

$$u = r_1v_1 + \cdots + r_mv_m \ \ e \ \ v = s_1v_1 + \cdots + s_mv_m \qquad (r_i, s_i \in \mathbb{R})$$

due combinazioni lineari dei vettori $v_1, \ldots, v_m$; sommando le due ugualglianze si ha

$$\begin{aligned} u + v &= r_1v_1 + \cdots + r_mv_m + s_1v_1 + \cdots + s_mv_m \\ &= (r_1 + s_1)v_1 + \cdots + (r_m + s_m)v_m, \end{aligned}$$

dunque $u + v$ e' una combinazione lineare di $v_1, \ldots, v_m$.

-Chiusura rispetto al prodotto scalari per vettori. Sia

$$u = r_1v_1 + \cdots + r_mv_m, \qquad (r_i \in \mathbb{R})$$

una combinazione lineare dei vettori $v_1, \ldots, v_m$, e sia $r \in \mathbb{R}$; moltiplicando per r entrambi i membri si ottiene

$$ru = r(r_1 v_1 + \cdots + r_m v_m) = (rr_1)v_1 + \cdots + (rr_m)v_m;$$

dunque ru e' una combinazione lineare di $v_1, \ldots, v_m$.

Definizione 2 *L'insieme di tutte le combinazioni lineari di una sequenza $v_1, \ldots, v_m$ di dati vettori $v_i \in \mathbb{R}^n$ si dice sottospazio di $\mathbb{R}^n$ generato da $v_1, \ldots, v_m$ e si indica con $\langle v_1, \ldots, v_m \rangle$; in simboli*

$$\langle v_1, \ldots, v_m \rangle = \{ r_1 v_1 + \cdots + r_m v_m;\ r_i \in \mathbb{R} \}.$$

E' utile definire anche il sottospazio generato da una sequenza vuota di vettori, ponendolo uguale al sottospazio $\{0\}$ ridotto al vettore nullo $0 \in \mathbb{R}^n$.

Sia V un sottospazio di $\mathbb{R}^n$. Ciascuna sequenza $v_1, \ldots, v_m$ di vettori $v_i \in V$ tali che $V = \langle v_1, \ldots, v_m \rangle$ si dice sistema di generatori di V.

Le proposizioni sopra enunciate e provate forniscono tutti i sottospazi di $\mathbb{R}^n$, nel senso delle seguenti proposizioni, che non dimostriamo.

Proposizione 3 *Ogni sottospazio di $\mathbb{R}^n$ si puo' rappresentare come l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo in n incognite.*

Proposizione 4 *Ogni sottospazio V di $\mathbb{R}^n$ si puo' rappresentare come il sottospazio generato da un numero finito di vettori di $\mathbb{R}^n$. In altri termini, ogni sottospazio di $\mathbb{R}^n$ possiede un sistema di generatori finito.*

4. Un sottospazio ha vari sistemi di generatori, alcuni dei quali possono contenere elementi sovrabbondanti.

   Ad esempio, sia V un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ e sia a_1, a_2, a_3 un sistema di generatori di V. Se a_3 si puo' scrivere come combinazione lineare di a_1, a_2, allora a_1, a_2 e' un sistema di generatori di V. In simboli:

   $$\text{se } V = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle \ \text{ e } \ a_3 \in \langle a_1, a_2 \rangle, \ \text{ allora } \ V = \langle a_1, a_2 \rangle,$$

   piu' in breve

   $$\text{se } \ a_3 \in \langle a_1, a_2 \rangle, \ \text{ allora } \ \langle a_1, a_2, a_3 \rangle = \langle a_1, a_2 \rangle,$$

   Infatti, da una parte si ha sempre $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle \supseteq \langle a_1, a_2 \rangle$ e dall'altra sotto l'ipotesi fatta si ha $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle \subseteq \langle a_1, a_2 \rangle$; di seguito motiviamo questa seconda affermazione.

   Sia $v \in \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$; esistono dunque $s_1, s_2, s_3 \in \mathbb{R}$ tali che

   $$v = s_1 a_1 + s_2 a_2 + s_3 a_3.$$

Per ipotesi si ha $a_3 \in \langle a_1, a_2 \rangle$; esistono dunque $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ tali che

$$a_3 = t_1 a_1 + t_2 a_2.$$

Sostituendo, si ha

$$v = s_1 a_1 + s_2 a_2 + s_3(t_1 a_1 + t_2 a_2) = (s_1 + s_3 t_1) a_1 + (s_2 + s_3 t_2) a_2;$$

cioe' si ha $v \in \langle a_1, a_2 \rangle$.

Piu' in generale si ha la seguente proposizione

Proposizione 5 *Sia V un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ e sia $a_1, \ldots, a_m$ un sistema di generatori di V (con $m \geq 2$). Se un a_i si puo' scrivere come combinazione lineare di $a_1, \ldots, \widehat{a_i}, \ldots, a_m$, allora $a_1, \ldots, \widehat{a_i}, \ldots, a_m$ e' un sistema di generatori di V. In simboli:*

$$\begin{aligned} &\textit{se}\ \ V = \langle a_1, \ldots, a_m \rangle \ \ \textit{e}\ \ a_i \in \langle a_1, \ldots, \widehat{a_i}, \ldots, a_m \rangle, \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \textit{allora}\ \ V = \langle a_1, \ldots, \widehat{a_i}, \ldots, a_m \rangle. \end{aligned}$$

Si e' scritto in breve $a_1, \ldots, \widehat{a_i}, \ldots, a_m$ al posto di $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_m$.

La dimostrazione di questa proposizione segue le linee del caso particolare $m = i = 3$ sopra discusso.

5. **Indipendenza lineare**

Le considerazioni del punto precedente suggeriscono la seguente definizione.

Definizione 3 *Siano $v_1, \ldots, v_m$ vettori in $\mathbb{R}^n$, con $m \geq 2$. Distinguiamo due casi:*

- esiste almeno un v_i che si puo' scrivere come combinazione lineare degli altri; in questo caso diciamo che i vettori $v_1, \ldots, v_m$ sono linearmente dipendenti;

- nessun v_i si puo' scrivere come combinazione lineare degli altri; in questo caso diciamo che i vettori $v_1, \ldots, v_m$ sono linearmente indipendenti.

Diciamo che un vettore e' linearmente dipendente o linearmente indipendente secondo che sia uguale o diverso dal vettore nullo $0 \in \mathbb{R}^n$. Diciamo infine che la sequenza vuota di vettori e' linearmente indipendente.

Iterando la proposizione del punto precedente si ha

Proposizione 6 *Ogni sottospazio di $\mathbb{R}^n$ possiede un sistema di generatori linearmente indipendente.*

Dimostrazione. Sia V un sottospazio di $\mathbb{R}^n$. Se $V = \{0\}$ e' ridotto al vettore nullo di $\mathbb{R}^n$, allora per le convenzioni adottate possiamo dire che e' generato dalla sequenza vuota di vettori, che e' linearmente indipendente. Supponiamo che V contenga un vettore diverso dal vettore nullo. Sappiamo che V possiede un sistema finito di generatori; se questi sono linearmente indipendenti, allora l'enunciato e' provato; se questi sono linearmente dipendenti, allora fra di essi ce ne e' uno che si puo' togliere in modo da ottenere ancora un sistema di generatori di V; ... si prosegue fino a che si trova un sistema di generatori di V che e' linearmente indipendente.

6. Esempio.

   Sia $V = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (4, 5, 6)$ $v_3 = (7, 8, 9)$. Osserviamo che

$$v_2 = \frac{1}{2} v_1 + \frac{1}{2} v_3;$$

   dunque

$$V = \langle v_1, v_3 \rangle.$$

   Ora, v_1 non e' un multiplo scalare di v_3 e v_3 non e' un multiplo scalare di v_1, dunqe v_1 e v_3 sono un sistema di generatori di V linearmente indipendenti. Identificando $\mathbb{R}^3$ con lo spazio mediante un sistema di riferimento cartesiano, si ha che V e' un piano per l'origine.

7. **Basi**

   Le considerazioni del punto precedente suggeriscono la seguente definizione

   Definizione 4 *Sia V un sottospazio di $\mathbb{R}^n$. Una sequenza $v_1, \ldots, v_p$ di vettori $v_i \in V$ si dice base di V se*

   1- $v_1, \ldots, v_p$ e' un sistema di generatori di V;

   2- $v_1, \ldots, v_p$ sono linearmente indipendenti.

   Nei termini di questa definizione la proposizone del punto precedente diviene

   Proposizione 7 *Ogni sottospazio di $\mathbb{R}^n$ possiede una base.*