Lezione del 10 dicembre. Insiemi linearmente indipendenti, basi, coordinate.

1. **Vettori linearmente dipendenti e indipendenti**

   Ricordiamo che due o piu' vettori di uno spazio $\mathbb{R}^n$ si dicono linearmente dipendenti se fra di essi ce ne e' almeno uno che si puo' scrivere come combinazione lineare degli altri e si dicono linearmente indipendenti in caso contrario, cioe' se nessuno di essi si puo' scrivere come combinazione lineare degli altri; un vettore si dice linearmente dipendente o indipendente secondo che sia uguale o diverso da $0 \in \mathbb{R}^n$; l'insieme vuoto si dice linearmente indipendente.

   Esempi.

   1- I vettori $a_1 = (1, 2, 3)$ e $a_2 = (0, 0, 0)$ sono linearmente dipendenti; infatti a_2 e' un multiplo scalare di a_1, in quanto $(0, 0, 0) = 0(1, 2, 3)$.

   2- I vettori $a_1 = (2, 4, 6)$ e $a_2 = (3, 6, 9)$ sono linearmente dipendenti; infatti a_1 e' un multiplo scalare di a_2, in quanto $(2, 4, 6) = \frac{2}{3}(3, 6, 9)$.

   3- I vettori $a_1 = (2, 4, 6)$ e $a_2 = (3, 6, 8)$ sono linearmente indipendenti; infatti: a_1 non e' un multiplo scalare di a_2, in quanto non esiste alcun $x \in \mathbb{R}$ tale che $(2, 4, 6) = x(3, 6, 8)$; a_2 non e' un multiplo scalare di a_1, in quanto non esiste alcun $x \in \mathbb{R}$ tale che $(3, 6, 8) = x(2, 4, 6)$.

   4- Se $a_1, \ldots, a_m$ sono m vettori in $\mathbb{R}^n$ ed uno di essi e' il vettore nullo $0 \in \mathbb{R}^n$, allora $a_1, \ldots, a_m$ sono linearmente dipendenti. Infatti se $a_i = 0 \in \mathbb{R}^n$, allora a_i si puo' scrivere come combinazione lineare degli altri, precisamente si ha

   $$a_i = 0 = 0a_1 + \cdots + 0a_{i-1} + 0a_{i+1} + \cdots + 0a_m.$$

   5- Siano dati due vettori $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^n$ diversi da $0 \in \mathbb{R}^n$. Supponiamo che a_1 sia multiplo scalare di a_2, cioe' esista un $x \in \mathbb{R}$ tale che $a_1 = xa_2$; essendo $a_1 \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ deve essere $x \neq 0$; dunque si puo' ricavare $a_2 = x^{-1}a_1$, cioe' a_2 e' un multiplo scalare di a_1. Lo stesso vale scambiando a_1 ed a_2. Per due vettori diversi dal vettore nullo si ha dunque che: o ciasacuno dei due vettori e' multiplo scalare dell'altro, oppure nessuno dei due e' multiplo scalare dell'altro.

   6- I vettori $a_1 = (1, 1, 0)$ $a_2 = (0, 1, 1)$, $a_3 = (1, 3, 2)$ sono linearmente dipendenti; infatti a_3 e' combinazione lineare di a_1 e a_2, in quanto

   $$(1, 3, 2) = 1(1, 1, 0) + 2(0, 1, 1).$$

   7- I vettori canonici $e_1 = (1, 0, 0)$ $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ di $\mathbb{R}^3$ sono linearmente indipendenti; infatti: e_1 non e' combinazione lineare di e_2 ed e_3, in quanto non esistono $x, y \in \mathbb{R}$ tali che

   $$(1, 0, 0) = x(0, 1, 0) + y(0, 0, 1);$$

e_2 non e' combinazione lineare di e_1 ed e_3, in quanto non esistono $x, y \in \mathbb{R}$ tali che

$$(0,1,0) = x(1,0,0) + y(0,0,1);$$

e_3 non e' combinazione lineare di e_1 ed e_2, ...

8- I vettori canonici $e_1 = (1,0,\ldots,0)$ $e_2 = (0,1,\ldots,0)$, ... $e_n = (0,0,\ldots,1)$ di $\mathbb{R}^n$ sono linearmente indipendenti; infatti, per ogni i si ha che e_i non si puo' scrivere come combinazione lineare degli altri, in quanto l'uguaglianza

$$e_i = x_1e_1 + \cdots + x_{i-1}e_{i-1} + x_{i+1}e_{i+1} + \cdots + x_ne_n \qquad (x_* \in \mathbb{R})$$

valutata alla componente $i-$ma porge l'uguaglianza

$$1 = x_10 + \cdots + x_{i-1}0 + x_{i+1}0 + \cdots + x_n0$$

che non e' mai soddisfatta.

2. Consideriamo i vettori $a_1 = (1,1,1)$ $a_2 = (1,2,4)$, $a_3 = (1,3,9)$, e ci chiediamo se sono linearmente dipendenti o indipendenti.

   Iniziamo col chiederci se a_1 e' o meno combinazione lineare di a_2 ed a_3, cioe' se esistono o meno $x, y \in \mathbb{R}$ tali che

   $$(1,1,1) = x(1,2,4) + y(1,3,9),$$

   cioe' se e' possibile o impossibile il sistema

   $$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 3y = 1 \\ 4x + 9y = 1 \end{cases}$$

   ... si trova che questo sistema e' impossibile, dunque a_1 non e' combinazione lineare di a_2 ed a_3.

   Dobbiamo allora chiederci se a_2 e' o meno combinazione lineare di a_1 ed a_3, cioe' se esistono o meno $x, y \in \mathbb{R}$ tali che

   $$(1,2,4) = x(1,1,1) + y(1,3,9),$$

   cioe' se e' possibile o impossibile il sistema

   $$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + 3y = 2 \\ x + 9y = 4 \end{cases}$$

   ... si trova che questo sistema e' impossibile, dunque a_2 non e' combinazione lineare di a_1 ed a_3.

Dobbiamo infine chiederci se a_3 e' o meno combinazione lineare di a_1 ed a_2, cioe' se esistono o meno $x, y \in \mathbb{R}$ tali che

$$(1,3,9) = x(1,1,1) + y(1,2,4),$$

cioe' se e' possibile o impossibile il sistema

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + 2y = 3 \\ x + 4y = 9 \end{cases}$$

... si trova che questo sistema e' impossibile, dunque a_3 non e' combinazione lineare di a_1 ed a_2.

Possiamo allora concludere che a_1, a_2, a_3 sono linearmente indipendenti.

3. **Caratterizzazione della dipendenza e indipendenza lineare**

Ci sono due principali modi di definire la dipendenza e indipendenza lineare; noi ne abbiamo scelto uno, e l'altro lo diamo mediante il seguente

Teorema 1 *Siano* $v_1, \ldots, v_p \in \mathbb{R}^n$. *Allora:*

- $v_1, \ldots, v_p$ *sono linearmente dipendenti se e solo se esistono degli scalari* $r_1, \ldots, r_p \in \mathbb{R}$ *non tutti nulli tali che*

$$r_1 v_1 + \cdots + r_p v_p = 0;$$

- $v_1, \ldots, v_p$ *sono linearmente indipendenti se e solo se l'uguaglianza*

$$x_1 v_1 + \cdots + x_p v_p = 0, \qquad x_i \in \mathbb{R}$$

e' soddisfatta solo per $x_1 = \ldots = x_p = 0$.

Per il lettore interessato, riportiamo la dimostrazione in appendice.

Riconsideriamo da questo nuovo punto di vista alcuni degli esempi sopra discussi.

- Consideriamo i vettori $a_1 = (1,1,0)$ $a_2 = (0,1,1)$, $a_3 = (1,3,2)$ e ci chiediamo se sono linearmente dipendenti o indipendenti. Cio' significa chiederci se esiste o meno una terna di scalari x_1, x_2, x_3 non tutti nulli tale che

$$x_1(1,1,0) + x_2(0,1,1) + x_3(1,3,2) = (0,0,0),$$

cioe' tale che

$$\begin{cases} x_1 + \; x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ \; x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

... questo sistema ha infinite soluzioni, in particolare ha qualche soluzione diversa dalla $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Dunque i vettori a_1, a_2, a_3 sono linearmente dipendenti.

- Consideriamo i vettori $a_1 = (1,1,1)$ $a_2 = (1,2,4)$, $a_3 = (1,3,9)$, e ci chiediamo se sono linearmente dipendenti o indipendenti. Cio' significa chiederci se esiste o meno una terna di scalari x_1, x_2, x_3 non tutti nulli tale che

$$x_1(1,1,1) + x_2(1,2,4) + x_3(1,3,9) = (0,0,0),$$

cioe' tale che

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 9x_3 = 0 \end{cases}$$

... questo sistema ha solo la soluzione $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Dunque i vettori a_1, a_2, a_3 sono linearmente indipendenti.

- Consideriamo i vettori canonici $e_1, e_2, \ldots, e_n$ di $\mathbb{R}^n$. L'uguaglianza

$$x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n = 0, \qquad (x_i \in \mathbb{R})$$

equivale al sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ \qquad \vdots \\ x_n = 0 \end{cases},$$

dunque i vettori canonici $e_1, e_2, \ldots, e_n$ sono linearmente indipendenti.

4. **Coordinate**

I vettori canonici $e_1, e_2, \ldots, e_n$ di $\mathbb{R}^n$ generano $\mathbb{R}^n$ e sono linearmente indipendenti, dunque sono una base di $\mathbb{R}^n$. Ogni vettore $r = (r_1, r_2, \ldots, r_n) \in \mathbb{R}^n$ si puo' scrivere in uno ed un solo modo come combinazione lineare

$$r = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n$$

di $e_1, e_2, \ldots, e_n$, e si ha $x_1 = r_1$, $x_2 = r_2$, ..., $x_n = r_n$. Dunque le componenti di r, o in altri termini le coordinate di r, sono i coefficienti dell'unica scrittura di r come combinazione lineare dei vettori della base canonica. In generale, per un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ si ha

Proposizione 1 *Sia $v_1, \ldots, v_p$ una base di un sottospazio V di $\mathbb{R}^n$. Allora ogni $v \in V$ si puo' scrivere in uno ed un solo modo come combinazione lineare*

$$v = r_1 v_1 + \ldots + r_p v_p, \qquad r_i \in \mathbb{R}$$

di $v_1, \ldots, v_p$; i coefficienti $r_1, \ldots, r_p$ della combinazione lineare si dicono coordinate di v rispetto alla base $v_1, \ldots, v_p$.

Non riportiamo la dimostrazione.

Associando ad ogni vettore di V la $p-$pla delle sue coordinate rispetto alla base $v_1, \ldots, v_p$ si ha una funzione

$$\varphi : V \to \mathbb{R}^p, \quad \varphi : v = r_1 v_1 + \ldots + r_p v_p \mapsto (r_1, \ldots, r_p).$$

Questa funzione e' una biiezione, inoltre si comporta bene rispetto alle operazioni di somma di vettori e moltiplicazione per scalari, nel senso che

$$\varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v)$$
$$\varphi(ru) = r\varphi(u)$$

per ogni $u, v \in V$ ed ogni $r \in \mathbb{R}$. Cio' significa che il sottospazio V si puo' identificare a tutti gli effetti con $\mathbb{R}^p$: tutte le proposizioni esprimibili mediante le operazioni di somma di vettori e prodotto scalari per vettori che valgono per i vettori di $\mathbb{R}^p$ valgono anche per i vettori di V, e viceversa.

Esempi

1- Sia $V = \langle a, b, c\rangle$ il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori $a = (1, 2, 3)$, $b = (4, 5, 6)$ $c = (7, 8, 9)$. Abbiamo visto che la sequenza a, c e' una base di V. Si ha che:

$$a = 1a + 0c, \quad b = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c, \quad c = 0a + 1c;$$

dunque, rispetto alla base a, c si ha che: a ha coordinate $(1, 0)$, b ha coordinate $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, c ha coordinate $(0, 1)$.

2- Consideriamo il sottospazio V di $\mathbb{R}^3$ costituito dalle soluzioni dell'equazione lineare omogenea

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

La soluzione generale del sistema e' data da

$$x_1 = -x_2 - x_3, \quad x_2 = \ qualsiasi, \quad x_3 = \ qualsiasi;$$

in altri termini, per ogni $(x_1, x_2, x_3) \in V$ si ha

$$(x_1, x_2, x_3) = (-x_2 - x_3, x_2, x_3) = x_2(-1, 1, 0) + x_3(-1, 0, 1).$$

Si osservi che i vettori $a = (-1, 1, 0)$ e $b = (-1, 0, 1)$ formano un sistema di generatori di V e sono linearmente indipendenti, dunque formano una base di V. La funzione $\varphi : V \to \mathbb{R}^2$ che associa ad ogni vettore di V le sue coordinate rispetto alla base a, b e' data da

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_3).$$

Appendice

1. Dimostrazione del Teorema 1.

   Basta considerare il caso $p \geq 2$, e provare le prime affermazioni sulla dipendenza lineare.

   -se $v_1, \dots, v_p$ sono linearmente dipendenti, allora c'e' un v_i che si puo' scrivere come
$$v_i = r_1 v_1 + \cdots + r_{i-1} v_{i-1} + r_{i+1} v_{i+1} + \cdots + r_p v_p$$
   portando tutti i termini ad un stesso membro si ha l'uguaglianza
$$r_1 v_1 + \cdots + r_{i-1} v_{i-1} + (-1) v_i + r_{i+1} v_{i+1} + \cdots + r_p v_p = 0,$$
   nella quale qualche coefficiente (certamente quello di v_i) e' $\neq 0$;

   -se esistono degli scalari $r_1, \dots, r_p$ non tutti nulli tali che valga l'uguaglianza
$$r_1 v_1 + \cdots + r_p v_p = 0$$
   allora per ciascun $r_i \neq 0$ (ne esiste almeno uno), possiamo scrivere
$$-r_i v_i = r_1 v_1 + \cdots + r_{i-1} v_{i-1} + r_{i+1} v_{i+1} + \cdots + r_p v_p,$$
   e dividendo per $-r_i$ ricavare
$$v_i = (-r_i^{-1} r_1) v_1 + \cdots + (-r_i^{-1} r_{i-1}) v_{i-1} + (-r_i^{-1} r_{i+1}) v_{i+1} + \cdots + (-r_i^{-1} r_p) v_p,$$
   dunque $v_1, \dots, v_p$ sono linearmente dipendenti.