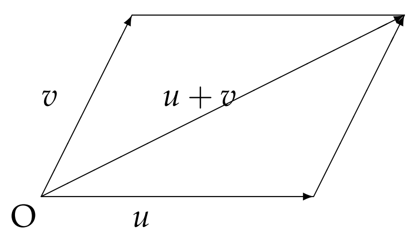
Lezione del 12 dicembre. Insiemi linearmente indipendenti, basi, dimensione.

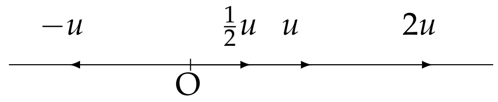
1. **Operazioni sui vettori applicati in un punto dello spazio**

   Fissato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico con origine in un punto O, identifichiamo al solito modo ciascuna terna ordinata di numeri reali con un punto dello spazio, ed identifichiamo ciascun punto dello spazio con un vettore applicato in O, quello avente come estremo libero tale punto. Allora

   -all'operazione di somma di terne di numeri reali corrisponde la seguente operazione di somma di vettori: il vettore somma $u + v$ di due dati vettori u e v applicati in O, e' il vettore applicato in O ottenuto completando la spezzata data da u e v ad un parallelogramma e prendendo di questo parallelogramma la diagonale uscente da O



   -all'operazione di prodotto di numeri reali per terne di numeri reali corrisponde la seguente operazione di prodotto di numeri reali per vettori: il prodotto di un numero reale r per un vettore v applicato in O e' il vettore rv applicato in O ottenuto moltiplicando la lunghezza di v per $|r|$, e cambiando il verso di v se $r < 0$:



   L'insieme dei vettori dello spazio applicati in un punto fissato O, con le operazioni di somma di vettori e prodotto di scalari per vettori e' uno spazio vettoriale nel senso della definizione generale, e viene detto "spazio vettoriale geometrico (di origine O)". La scelta di un sistema di riferimento permette di identificare lo spazio vettoriale geometrico con lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$.

   Si ha:

-la relazione ″il vettore u e′ multiplo scalare del vettore v (diverso dal vettore nullo)″ ha il seguente significato geometrico: ″il vettore u sta sulla retta individuata dal vettore v;″

-la relazione ″il vettore u e′ combinazione lineare dei vettori v, w (non allineati)″ ha il seguente significato geometrico: ″il vettore u sta sul piano individuato dai vettori v, w.″

2. **Indipendenza lineare- Osservazioni**

   1-Consideriamo due vettori $u, v \in \mathbb{R}^n$; se u, v sono linearmente indipendenti, allora in particolare si ha che u e′ diverso dal vettore nullo $0 \in \mathbb{R}^n$ e che v non e′ multiplo scalare di u. Vale anche il viceversa, come proviamo di seguito. Sia u diverso dal vettore nullo e v non sia multiplo scalare di u; consideriamo l'uguaglianza

   $$xu + yv = 0, \qquad (x, y \in \mathbb{R});$$

   se fosse $y \neq 0$ allora si potrebbe ricavare $v = -\frac{x}{y}u$, contro l'assunto che v non sia multiplo scalare di u; dunque deve essere $y = 0$, e l'uguaglianza diviene

   $$xu = 0 \qquad (x \in \mathbb{R});$$

   ora, essendo u diverso dal vettore nullo deve essere $x = 0$; in definitiva, deve essere $x = y = 0$, e cio′ siginfica che u, v sono linearmente indipendenti.

   2-Consideriamo tre vettori $u, v, w \in \mathbb{R}^n$; se u, v, w sono linearmente indipendenti, allora in particolare si ha che u e′ diverso dal vettore nullo $0 \in \mathbb{R}^n$, che v non e′ multiplo scalare di u, e che w non e′ combinazione lineare di u, v. Vale anche il viceversa, come proviamo di seguito. Sia u diverso dal vettore nullo, v non sia multiplo scalare di u, e w non sia combinzaione lineare di u, v; consideriamo l'uguaglianza

   $$xu + yv + zw = 0, \qquad (x, y, z \in \mathbb{R});$$

   se fosse $z \neq 0$ allora si potrebbe ricavare $w = \frac{-x}{y}u + \frac{-y}{z}v$, contro l'assunto che w non sia combinazione lineare di u, v; dunque deve essere $z = 0$, e l'uguaglianza diviene

   $$xu + yv = 0 \qquad (x \in \mathbb{R});$$

   ora, essendo u diverso dal vettore nullo e v non multiplo scalre di u, dal punto precedente si ottiene che deve essere $x = y = 0$; in definitiva, deve essere $x = y = z = 0$, e cio′ siginfica che u, v, w sono linearmente indipendenti.

   3-In generale, si ha che $p(\geq 2)$ vettori $v_1, v_2, \ldots, v_p \in \mathbb{R}^n$ sono linearmente indipendenti se e solo se v_i non e′ combinazione lineare di $v_1, \ldots, v_{i-1}$ per ogni $i = 2, 3, \ldots, p$.

3. Nello spazio vettoriale geometrico, le sequenze di vettori linearmente indipendenti possono essere descritte come segue.

   1- un vettore u e′ linearmente indipendente se e solo se u e′ diverso dal vettore nullo;

   2- due vettori u, v sono linearmente indipendenti se e solo se u e′ diverso dal vettore nullo e v non sta sulla retta individuata da u;

   3- tre vettori u, v, w sono linearmente indipendenti se e solo se u e′ diverso dal vettore nullo, v non sta sulla retta individuata da u, e w non sta sul piano individuato da u, v;

   4- non esistono piu′ di tre vettori linearmente indipendenti; [1]

4. Nello spazio vettoriale geometrico, i sistemi di generatori possono essere descritti come segue.

   1- non esiste alcuna sequenza di uno o due vettori che sia un sistema di generatori dello spazio;

   2- una sequenza di tre vettori u, v, w e′ un sistema di generatori dello spazio se e solo se u e′ diverso dal vettore nullo, v non sta sulla retta individuata da u, e w non sta sul piano individuato da u, v;

   3- una sequenza di piu′ di tre vettori e′ un sistema di generatori dello spazio se e solo se contiene una sottosequenza di tre vettori che soddisfa le proprieta′ del punto precedente.

5. Nello spazio vettoriale geometrico, le basi possono essere descritte come segue.

   - tutte le basi dello spazio sono costituite da tre vettori; una sequenza di tre vettori u, v, w e′ una base dello spazio se e solo se u e′ diverso dal vettore nullo, v non sta sulla retta individuata da u, e w non sta sul piano individuato da u, v;

   Osserviamo che

   - una sequenza di tre vettori e′ linearmente indipendente se e solo se e′ un sistema di generatori dello spazio se e solo se e′ una base dello spazio.

---

[1] Infatti, se u, v, w sono tre vettori linearmente indipendenti e t e′ un quarto vettore, allora t deve essere combinazione lineare di u, v, w, e dunque u, v, w, t sono linearmente dipendenti, come mostrato di seguito.

Si ha che u e′ diverso dal vettore nullo, v non sta sulla retta individuata da u, e w non sta sul piano individuato da u, v. Consideriamo il vettore t; se t sta sul piano individuato da u, v allora t e′ combinazione lineare di u, v, e dunque a maggior ragione t e′ combinazione lineare di u, v, w; supponiamo dunque che t non stia sul piano individuato da u, v; allora si ha che:

-il piano parallelo al piano individuato da u, v passante per l'estremo libero di t incontra la retta individuata da w in un punto, che e′ l'estremo libero di un vettore t_1 multiplo scalare di w;

-la retta parallelo alla retta individuata da w passante per l'estremo libero di t incontra il piano individuato da u, v in un punto, che e′ l'estremo libero di un vettore t_2 combinazione lineare di u, v;

-si ha $t = t_1 + t_2$; dunque t e′ combinazione lineare di u, v, w.

6. **Combinazioni lineari e sistemi lineari**

   Dati nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ $p+1$ vettori $a_1 = (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n1})$, $a_2 = (a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{n2})$, ..., $a_p = (a_{1p}, a_{2p}, \ldots, a_{np})$, $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, ci chiediamo se b e' o meno combinazione lineare di $a_1, \ldots, a_p$. Cio' significa chiedersi se l'equazione fra vettori nelle p incognite scalari $x_1, \ldots, x_p$

   $$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_p a_p = b$$

   ha soluzione o meno. Passando alle componenti dei vettori, si ha si ha il sistema di n equazioni fra scalari nelle p incognite $x_1, \ldots, x_p$

   $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}.$$

   Dunque si ha che

   > in $\mathbb{R}^n$ la ricerca delle combinazioni lineari di dati p vettori che risultano in un dato vettore si traduce sempre nella ricerca delle soluzioni di un sistema lineare di n equazioni in p incognite.

7. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$, si ha:

   - esistono sequenze di uno, due, ..., n vettori linearmente indipendenti, ad esempio quelle ottenute prendendo uno, due, ..., o tutti i vettori canonici di $\mathbb{R}^n$.

   - esistono sequenze di n o piu' vettori che sono sistemi di generatori di $\mathbb{R}^n$, ad esempio quelle ottenute prendendo gli n vettori canonici di $\mathbb{R}^n$ piu' altri vettori.

   - esiste una sequenza di n vettori che e' una base di $\mathbb{R}^n$, ad esempio la base canonica.

   Inoltre si ha

   Teorema 1 *Siano $a_1, \ldots, a_p \in \mathbb{R}^n$.*

   1- se $a_1, \ldots, a_p$ sono linearmente indipendenti, allora $p \leq n$;

   2- se $a_1, \ldots, a_p$ sono un sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$, allora $p \geq n$.

   3- se $a_1, \ldots, a_p$ e' una base di $\mathbb{R}^n$, allora $p = n$.

Dimostrazione.

1- Proviamo che se $p > n$ allora $a_1, \ldots, a_p$ sono linearmente dipendenti. Cosideriamo l'equazione vettoriale

$$x_1 a_1 + \cdots + x_p a_p = 0, \qquad (0 \in \mathbb{R}^n)$$

nelle p incognite scalari $x_1, \ldots, x_p$. Questa equazione equivale a un sistema lineare omogeneo di n equazioni scalari nelle p incognite $x_1, \ldots, x_p$. Essendo il sistema omogeneo ed essendo $p > n$, per i teoremi sui sistemi lineari (cfr. Lez. XXVI, punto 5, Prop. 2), si ha che il sistema ha qualche soluzione diversa dalla soluzione banale $x_1 = \cdots = x_p = 0$. Questa soluzione e' una soluzione non banale dell'equazione vettoriale, dunque i vettori $a_1, \ldots, a_p$ sono linearmente dipendenti.

2- Non dimostriamo la seconda affermazione sui sistemi di generatori. [2]

3- Se la sequenza di vettori $a_1, \ldots, a_p$ e' una base di $\mathbb{R}^n$, allora per definizione essa e' linearmente indipendente ed e' sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$, allora dai due punti precedenti si ha $p \leq n$ e $p \geq n$, e cio' significa $p = n$.

8. Abbiamo visto che nello spazio vettoriale geometrico tre vettori sono linearmente indipendenti se solo se sono un sistema di generatori dello spazio se e solo se sono una base dello spazio. Lo stesso vale in generale.

Teorema 2 *Per una sequenza $a_1, \ldots, a_n$ di n vettori in $\mathbb{R}^n$ sono equivalenti:*

1-la sequenza $a_1, \ldots, a_n$ e' lineramente indipendente;

2-la sequenza $a_1, \ldots, a_n$ e' un sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$;

3-la sequenza $a_1, \ldots, a_n$ e' una base di $\mathbb{R}^n$.

---

[2] Una motivazione a grandi lineee del fatto che se $p < n$ allora la sequenza $a_1, \ldots, a_p$ non e' un sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$. Cosideriamo per ciascun $b \in \mathbb{R}^n$ l'equazione vettoriale

$$x_1 a_1 + \cdots + x_p a_p = b, \qquad (0 \in \mathbb{R}^n)$$

nelle p incognite scalari $x_1, \ldots, x_p$. A queste equazioni vettoriali equivalgono a i sistema lineari

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + \cdots + a_{1p} x_p = b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{n1} x_1 + \cdots + a_{np} x_p = b_n \end{cases}$$

di n equazioni scalari nelle p incognite $x_1, \ldots, x_p$. Dal fatto che $n > p$ si puo' dedurre che esistono dei valori dei termini noti $b_1, \ldots, b_n$ per i quali il sistema e' impossibile (non motiviamo questa affermazione). Questi valori danno un vettore $b \in \mathbb{R}^n$ per il quale l'equazione vettoriale e' impossibile. Dunque la sequenza dei vettori $a_1, \ldots, a_p$ non e' un sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$.

Dimostrazione. Si tratta di mostrare l'equivalenza fra la (1) e la (2). Mostriamo solo che dalla (1) segue la (2).

Supponiamo dunque che la sequenza $a_1, \ldots, a_n$ sia lineramente indipendente. Cio' significa che l'equazione vettoriale

$$x_1 a_1 + \cdots + x_p a_n = 0, \qquad (0 \in \mathbb{R}^n)$$

nelle n incognite scalari $x_1, \ldots, x_n$ ha solo la soluzione banale $x_1 = \ldots = x_n = 0$. Dunque il corrispondente sistema lineare omogeneo di n equazioni scalari nelle n incognite $x_1, \ldots, x_n$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

ha solo la soluzione banale $x_1 = \ldots = x_n = 0$, cioe' e' determinato. Da cio', per i teoremi sui sistemi lineari (cfr. Lez. XXIII, punto 6, Th. 1) si ha che per ogni $b_1, \ldots b_n \in \mathbb{R}$ il sistema lineare

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

e' determinato. Cio' significa che per ogni $b \in \mathbb{R}^n$ l'equazione vettoriale

$$x_1 a_1 + \cdots + x_p a_n = b, \qquad (0 \in \mathbb{R}^n)$$

nelle n incognite scalari $x_1, \ldots, x_n$ ha una ed una sola soluzione. Dunque la sequenza $a_1, \ldots, a_n$ e' un sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$.

9. Una famiglia abbastanza ampia di basi di $\mathbb{R}^n$ si puo' ottenere prendendo le sequenze di vettori del tipo

$$a_1 = (a_{11}, 0, \ldots, 0), \quad a_2 = (a_{12}, a_{22}, \ldots, 0), \quad \ldots, \quad a_n = (a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{nn}),$$

sotto la condizione $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn} \neq 0$. Cio' segue dalle considerazioni svolte al punto 2, in quanto a_i non e' combonazione lineare di $a_1, \ldots, a_{i-1}$ per ogni $i = 2, \ldots, n$.

10. **Sottospazi, basi, dimensione**

Nella lezione precedente abbiamo visto come ciascun sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ si possa identificare con un opportuno spazio vettoriale $\mathbb{R}^p$; dunque, tutti le proposizioni ed i teoremi sopra stabiliti valgono anche per i sottospazi. In particolare, si ha

Teorema 3 *Tutte le basi di uno stesso sottospazio di $\mathbb{R}^n$ sono formate da uno stesso numero di vettori.*

Il numero di vettori in una base qualsiasi di un sottospazio V di $\mathbb{R}^n$ si dice "dimensione" di V e si indica con $\dim(V)$. In particolare si ha $\dim(\mathbb{R}^n) = n$. Per i sottospazi dati mediante un sistema di generatori si ha la

Proposizione 1 *Sia $V = \langle a_1, \ldots, a_p \rangle$ il sottospazio generato dai vettori $a_1, \ldots, a_p \in \mathbb{R}^n$. Allora*

-$\dim(V) \leq p$;

-$\dim(V) = p$ *se e solo se la sequenza dei vettori $a_1, \ldots, a_p$ e' linearmente indipendente.*