Lezione del 26 settembre.

1. **Funzioni.**

   Una funzione f da un insieme A a un insieme B e' una legge che associa a ciascun elemento di A uno ed un solo elemento di B; se ad un elemento $a \in A$ la funzione f associa un elemento $b \in B$ allora si dice in breve che "f di a e' uguale a b" e si scrive $f(a) = b$; spesso si descrive una funzione f usando un simbolo, ad esempio x, per indicare un elemento variabile in A, e assegnando un'espressione $f(x)$ nella variabile x che per ogni valore di x in A assume uno ed un solo valore in B; A si dice dominio di f, B si dice codominio di f, e si scrive

   $$f : A \to B, \quad f : x \mapsto f(x)$$

   Dati un primo insieme A ed un secondo insieme B, l'insieme delle coppie ordinate (a, b) con $a \in A$ e $b \in B$ si dice prodotto cartesiano di A per B e si indica con $A \times B$; in simboli

   $$A \times B = \{(a, b);\ a \in A,\ b \in B\}.$$

   Il grafico $graf(f)$ di una funzione $f : A \to B$ e' il sottinsieme di $A \times B$ che e' costituito dalle coppie ordinate $(x, f(x))$ dove x e' un elemento variabile in A, in altri termini dalle coppie ordinate (x, y) dove x e y sono elementi variabili rispettivamente in A e B legati dalla relazione $y = f(x)$; in simboli:

   $$graf(f) = \{(x, f(x)) :\ x \in A\} = \{(x, y) \in A \times B :\ y = f(x)\}$$

   Noi considereremo principalmente funzioni reali di variabile reale, cioe' funzioni $f : A \to B$ dove A e B sono sottinsiemi di $\mathbb{R}$, spesso intervalli o unioni finite di intervalli.

2. Cosi' come l'insieme $\mathbb{R}$ puo' essere identificato con l'insieme dei punti di una retta, si ha che l'insieme $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ puo' essere identificato con l'insieme dei punti del piano.

   Fissati su una retta un primo punto ed un secondo diverso punto, l'identificazione del numero 0 col primo punto e del numero 1 col secondo punto si estende in modo naturale ad una identificazione dei numeri reali con i punti della retta; ciascun numero reale e' rappresentato da un punto sulla retta, e ciascun punto sulla retta rappresenta un numero reale. Si dice che i due punti formano un sistema di riferimento per la retta, il primo punto si dice origine ed il secondo punto si dice punto unita'; il numero reale da cui proviene un punto si dice coordinata del punto.

   Siano fissati nel piano: un punto O (origine), una prima retta (I asse) per O, ed una diversa seconda retta (II asse) per O; un punto sul I asse e un punto sul II asse, diversi da O. Solitamente, si fissa il II asse perpendicolare al I asse, e i due punti alla stessa distanza da O.

Su ciascun asse, il punto O e il punto fissato costituiscono un sistema di riferimento. Data una coppia ordinata di numeri reali, si ha che il primo numero e' rappresentato da un punto del I asse, il secondo numero e' rappresentato da un punto del II asse, la retta per il primo punto parallela al II asse e la retta per il secondo punto parallela al I asse si intersecano in un punto del piano. Si ha cosi' una corrispondenza biunivoca fra l'insieme $\mathbb{R}^2$ delle coppie ordinate di numeri reali e l'insieme dei punti del piano: ad ogni coppia ordinata corrisponde un punto del piano, ed ogni punto del piano proviene da una ed una sola coppia ordinata.

Si dice che l'origine, i due assi, e i punti fissati su essi costituiscono un sistema di riferimento per il piano. Se la coppia ordinata (a, b) e' rappresentata dal punto A, si dice che A e' ha coordinate (a, b), e si scrive $A(a, b)$. Solitamente, il I asse viene detto asse x, e il II asse viene detto asse y.

3. Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to B \subseteq \mathbb{R}$ una funzione reale di variabile reale; il grafico di f

$$graf(f) = \{(x, y) \in A \times B;\ y = f(x)\};$$

e' rappresentato da una "linea" nel piano, avente equazione $y = f(x)$.

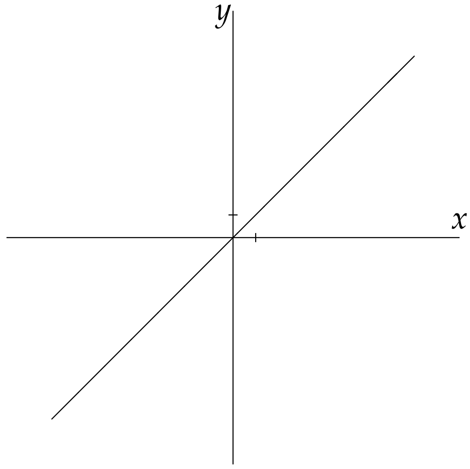
Una "linea" $\mathfrak{L}$ nel piano e' il grafico di una funzione se e solo se ogni retta parallela all'asse y incontra $\mathfrak{L}$ in al piu' un punto; in tal caso il dominio della funzione e' l'insieme dei punti $h \in \mathbb{R}$ tali che la retta $x = h$ incontra $\mathfrak{L}$ in esattamente un punto P_h, per ciascuno di questi punti h, l'immagine di h e' la seconda coordinata di P_h, e il codominio della funzione e' un qualsiasi insieme contenente tutte queste immagini.

Di seguito passiamo in rassegna alcune funzioni reali di variabile reale e i loro grafici.

4. Funzione identita' $id_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $id_{\mathbb{R}}(x) = x$. Il suo grafico e'

$$graf(id_{\mathbb{R}}) = \{(x, x);\ x \in \mathbb{R}\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y = x\}$$

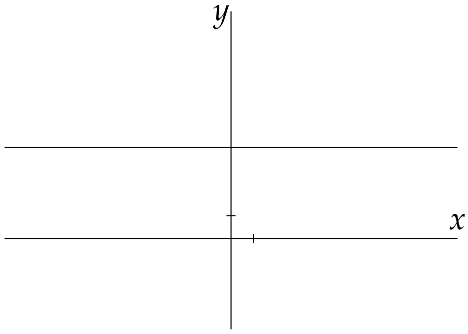
dunque e' una retta, la bisettrice del primo e terzo quadrante.



Funzione costante $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = c$, dove c e' una costante in $\mathbb{R}$. Il suo grafico e'

$$graf(f) = \{(x, c);\ x \in \mathbb{R}\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y = c\}$$

dunque e' una retta parallela all'asse x.

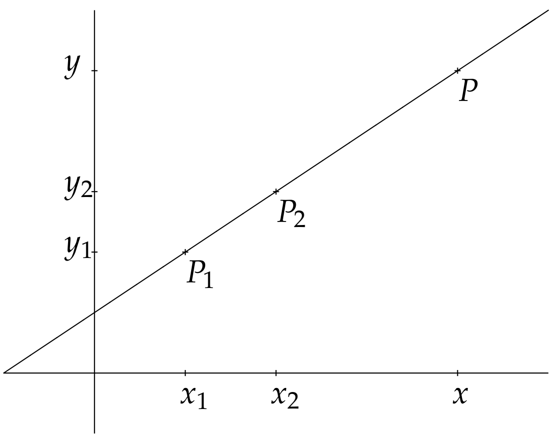


Prima di proseguire, ricordiamo alcune nozioni di base di geometria analitica.

5. Siano $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ due punti diversi, che non stanno su una retta parallela all'asse y; la *pendenza del segmento* P_1P_2 e' il rapporto dell'incremento delle seconde coordinate sull'incremento delle prime coordinate:

$$\textit{pendenza di } P_1P_2 \ = \ \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Sia r una retta non parallela all'asse y; la *pendenza della retta* r e' la pendenza di un qualsiasi segmento con estremi su r. In effetti tutti i segmenti con estremi su una stessa retta hanno la stessa pendenza, e questa proprieta' caratterizza le rette fra le altre curve.



Siano $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ due punti diversi, che non stanno su una retta parallela all'asse y, e sia r la retta passante per P_1 e P_2. Un punto $P(x, y)$ diverso da P_1 appartiene alla retta r se e solo se

$$\textit{pendenza di } P_1P \ = \ \textit{pendenza di } P_1P_2,$$

cioe'

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

Da cio' segue che l'equazione della retta r per i due punti P_1 e P_2 e'

$$y - y_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1).$$

L'equazione della retta di pendenza m per un punto $P_0(x_0, y_0)$ e'

$$y - y_0 = m(x-x_0);$$

esplicitando la y, e mettendo assieme le costanti, si ottiene un'equazione del tipo

$$y = mx + q.$$

Questa e' l'equazione canonica della retta; ad essa corrisponde la retta di pendenza m passante per $(0, q)$.

6. Funzione polinomiale di I grado $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definita da

   $$f(x) = mx + q,$$

   dove m, q sono costanti in $\mathbb{R}$, e $m \neq 0$. Il grafico di una tale funzione e' la retta di equazione

   $$y = mx + q.$$

7. **Funzioni crescenti, funzioni decrescenti**

   Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione reale di variabile reale e sia $C \subseteq A$.

   Diciamo che f e' "strettamente crescente" su C se per ogni $x_1, x_2 \in C$ con $x_1 < x_2$ si ha $f(x_1) < f(x_2)$, in breve

   $$\forall x_1, x_2 \in C,\ x_1 < x_2 \ \Rightarrow f(x_1) < f(x_2);$$

   se f soddisfa questa proprieta' con i segni $<$ rimpiazzati dal segno $\leq$, allora si dice che f e' "debolmente crescente" o in breve "crescente" su C.

   Diciamo che f e' "strettamente decrescente" su C se per ogni $x_1, x_2 \in C$ con $x_1 < x_2$ si ha $f(x_1) > f(x_2)$, in breve

   $$\forall x_1, x_2 \in C,\ x_1 < x_2 \ \Rightarrow f(x_1) > f(x_2);$$

   se f soddisfa questa proprieta' con i segni $>$ rimpiazzati dal segno $\geq$, allora si dice che f e' "debolmente decrescente" o in breve "decrescente" su C.

   Una funzione costante e' sia debolmente crescente che debolmente decrescente; vale il viceversa. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = mx + q$, una funzione polinomiale di I grado. Si ha:

   per $m > 0$ la funzione f e' strettamente crescente;

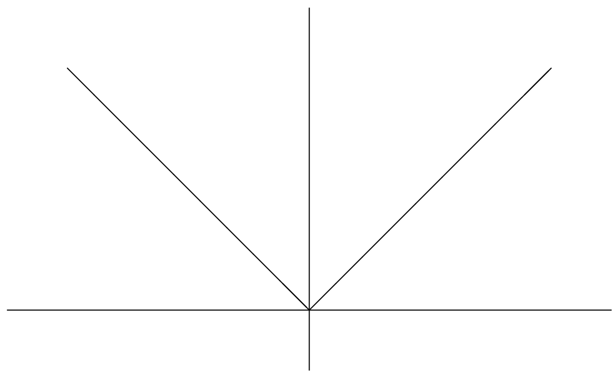
   per $m < 0$ la funzione f e' strettamente decrescente.

   Per esercizio, si provi questa affermazione usando la definizione.

8. La funzione valore assoluto e' la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0, \\ -x & \text{se } x \leq 0, \end{cases}$$

Il suo grafico e' rappresentato di seguito



9. Esercizio svolto a lezione. Descrivere il grafico delle funzioni $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite da

$$f(x) = |x| + 1$$
$$g(x) = -|x|$$
$$h(x) = |x + 1|$$

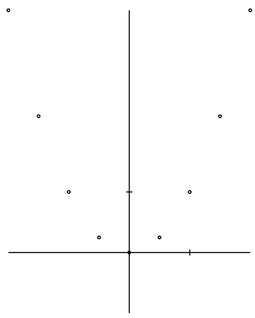
Problema: sia data una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ed un numero reale p, e sia $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $h(x) = f(x + p)$; come sono legati i gradfici di f e h?

Lo svolgimento dell'esercizio precedente suggerisce che il grafico di h si ottiene dal grafico di f applicando alla prima coordinata di ciascun punto una traslazione di $-p$. Cosi' e', infatti

$$\begin{aligned} graf(h) &= \{(x, h(x));\ x \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x, f(x + p));\ x \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x - p, f(x));\ x \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

10. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

Nella figura seguente sono riportati i punti del grafico di f che corrispondono ai valori $x = 0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1, \pm\frac{3}{2}, \pm 2$.



La funzione f e' strettamente decrescente sull'intervallo $]-\infty, 0]$, ed e' strettamente crescente sull'intervallo $[0, +\infty[$.

Proviamo che f e' strettamente crescente sull'intervallo $[0, +\infty[$, cioe' che

$$\forall x_1, x_2 \in [0, +\infty[, \qquad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow x_1^2 < x_2^2.$$

Per $x_1 = 0$ si ha $x_1^2 = 0 < x_2^2$; sia $x_1 \neq 0$.

Moltiplicando entrambe i membri della disuguaglianza $x_1 < x_2$ per x_1, che e' > 0, otteniamo $x_1^2 < x_1 x_2$;

moltiplicando entrambe i membri della disuguaglianza $x_1 < x_2$ per x_1, che e' > 0, otteniamo $x_1 x_2 < x_2^2$;

da queste due disuguaglianze, per la transitivita' della relazione d'ordine otteniamo $x_1^2 < x_2^2$.

Esercizio Si provi che f e' strettamente decrescente su $]-\infty, 0]$.

Piu' in generale sui ha che

> *Ciascuna funzione potenza ad esponente naturale pari e' strettamente decrescente su* $]-\infty, 0]$, *ed e' strettamente crescente su* $[0, +\infty[$.

11. Funzione polinomiale di II grado $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, data da

    $$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

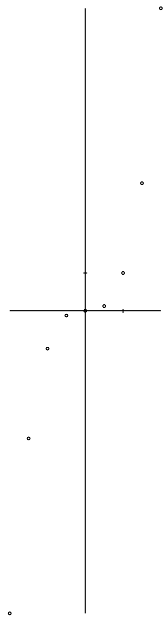
    dove a, b, c sono costanti in $\mathbb{R}$ con $a \neq 0$. Il grafico di f e' la curva di equazione

    $$y = ax^2 + bx + c,$$

    che e' una parabola con asse parallelo all'asse y; se $a > 0$ la concavita' della parabola e' rivolta verso l'alto, se $a > 0$ la concavita' della parabola e' rivolta verso il basso.

12. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$.

    Nella figura seguente sono riportati i punti del grafico di f che corrispondono ai valori $x = 0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1, \pm\frac{3}{2}, \pm 2$.

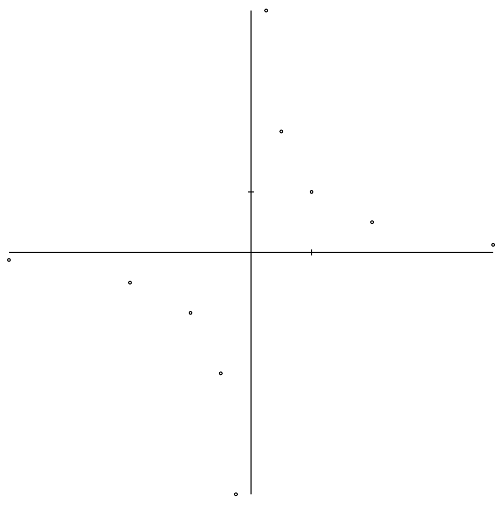


Esercizio Si provi che f e' strettamente crescente su $\mathbb{R}$.

Piu' in generale sui ha che

> *Ciascuna funzione potenza ad esponente naturale dispari e' strettamente crescente su* $\mathbb{R}$.

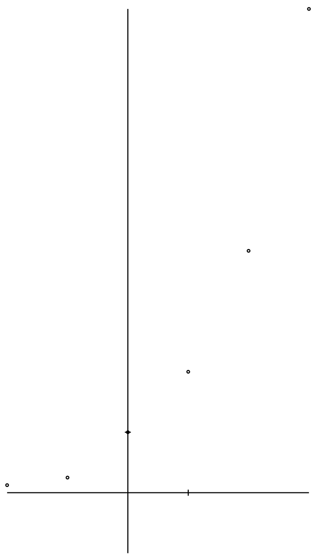
13. Sia $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $A =]-\infty, 0[\smile]0, +\infty[$, $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in A$.
    Nella figura seguente sono riportati alcuni punti del grafico di f.



Esercizio Si provi che f e' strettamente decrescente su $]-\infty, 0[$ e su $]0, +\infty[$.
E' decrescente su $]-\infty, 0[\smile]0, +\infty[$?

14. Sia $\exp_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $exp_2(x) = 2^x$, la funzione esponenziale in base 2.

    Nella figura seguente sono riportati alcuni punti del grafico di f.

    La funzione esponenziale $\exp_2$ e' strettamente crescente su $\mathbb{R}$; e' facile riconoscere che $\exp_2$ e' strettamente crescente su $\mathbb{Z}$, piu' complesso (e fuori dagli scopi di questa lezione) e' provare che $\exp_2$ e' strettamente crescente su $\mathbb{R}$;

    Esercizio Si svolga l'analoga analisi per la funzione esponenziale in base $\frac{1}{2}$.

15. Sia $b \in \mathbb{R}$ con $b > 0$. La funzione

    $$exp_b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad exp_b(x) = b^x$$

    viene detta "funzione esponenziale di base b".

    Si prova che

    > *La funzione esponenziale* $\exp_b$ *e' strettamente crescente, costante, strerttamente decrescente su* $\mathbb{R}$*, secondo che* $b > 1$, $b = 1$, *o* $0 < b < 1$.