Lezione del 15 dicembre. Ortogonalita' nel piano e nello spazio.

1. **Ortogonalita' nel piano.**

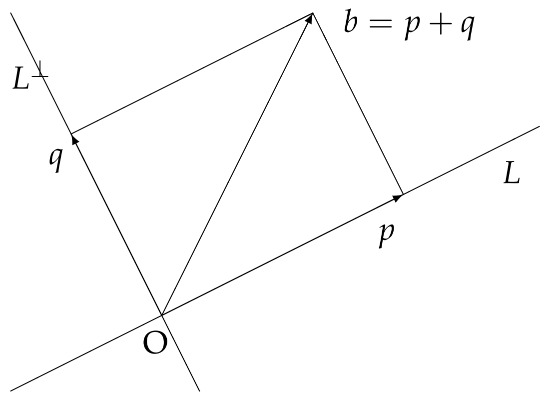
   Fissato nel piano un punto O, consideriamo i vettori applicati in O. Diciamo che due vettori non nulli sono fra loro ortogonali se e solo se le rette da essi individuate sono fra loro ortogonali, cioe' formano quattro angoli uguali (angoli retti). Al posto di dire che due vettori u e v sono fra loro ortogonali, talvolta diciamo che u e' ortogonale a v, o che v e' ortogonale a u, e scriviamo rispettivamente $u \perp v$, oppure $v \perp u$. Per convenzione, diciamo che il vettore nullo e' ortogonale ad ogni vettore (compreso se' stesso).

   Osserviamo che i vettori ortogonali a un dato vettore $v \neq 0$ descrivono una retta per O.

   Data una retta L per O, sia $L^\perp$ la retta per O ortogonale ad L. Ogni vettore b si puo' scomporre in uno ed un solo modo come somma di un vettore p sulla retta L ed un vettore q sulla retta $L^\perp$

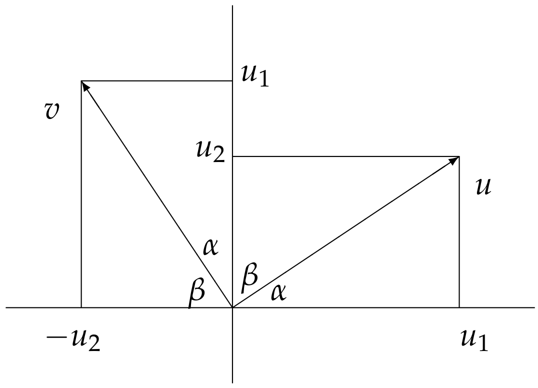
   $$\begin{aligned} &b = p + q \\ &p \in L \\ &q \in L^\perp \end{aligned}$$

   Diciamo che p e' la *proiezione ortogonale* di b su L, e che q e' la *proiezione ortogonale* di b su $L^\perp$.

2. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico con origine in O, identifichiamo l'insieme dei vettori del piano applicati in O con con $\mathbb{R}^2$.

   Dato un vettore non nullo $u = (u_1, u_2)$, ci sono un paio di scelte psicologicamente naturali per un vettore ortogonale ad u, una delle quali e' $v = (-u_2, u_1)$.



La scelta e' corretta. Informalmente, si puo' osservare che si vengono a formare quattro triangoli rettangoli uguali, l'angolo formato dai vettori u e v e' $\alpha + \beta$, ma $\alpha + \beta$ e' anche l'angolo formato dai due assi coordinati, che e' retto.

I vettori ortogonali al vettore u sono tutti e soli quelli del tipo $rv = (-ru_2, ru_1)$, dove r e' uno scalare qualsiasi.

Fatto 1 *Per ogni coppia di vettori $a = (a_1, a_2)$ e $b = (b_1, b_2)$ di $\mathbb{R}^2$, si ha che*

$$a \perp b \quad \text{se e solo se} \quad a_1b_1 + a_2b_2 = 0;$$

essendo

$$a_1b_1 + a_2b_2 = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = a'b,$$

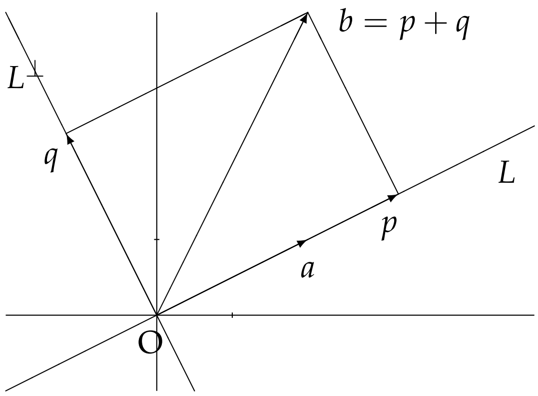
sinteticamente, si ha che

$$a \perp b \quad \text{se e solo se} \quad a'b = 0.$$

3. Vediamo ora come la costruzione della proiezione ortogonale di un vettore b (applicato in O) su una retta L per O si possa effettuare algebricamente. Descriviamo la retta L come l'insieme dei vettori multipli scalari di un vettore non nullo a, cioe' come la retta generata da a

$$L = \{ra;\ r \in \mathbb{R}\} = \langle a \rangle.$$

Osserviamo che un vettore q appartiene alla retta $L^\perp$ se e solo se e' ortogonale ad a, cioe' se e solo se $a'q = 0$.



Per fissare le idee, faremo riferimento al caso concreto

$a = (2, 1), \quad b = (2, 4).$

Cerchiamo dunque due vettori p, q che soddisfino le condizioni

$$
\begin{aligned}
b &= p + q \\
p &= ra, \qquad r \in \mathbb{R} \\
a'q &= 0,
\end{aligned}
$$

dove r e' uno scalare incognito.

Sostituendo l'espressione di p in funzione di r nella prima condizione

$$b = ra + q,$$

e moltiplicando a sinistra per a' entrambe i membri si ha

$$a'b = a'(ra + q),$$

cioe'

$$a'b = r\, a'a + a'q,$$

da cui, per la terza condizione, si ha

$$a'b = r\, a'a,$$

o

$$r\, a'a = a'b.$$

Ora, questa e' un'equazione lineare nell'incognita r, e il coefficiente $a'a$ e' diverso da 0 in quanto a e' diverso dal vettore nullo. Si ha cosi' una ed una sola soluzione:

$$r = \frac{a'b}{a'a},$$

dalla quale si ottiene

$$p = ra = \frac{a'b}{a'a} a.$$

Lo scalare $(a'b)\ /\ (a'a)$ viene detto *coefficiente di Fourier* del vettore b rispetto al vettore a.

Nel nostro caso, si ha

$$r = \frac{a'b}{a'a} = \frac{2 \cdot 2 + 1 \cdot 4}{2 \cdot 2 + 1 \cdot 1} = \frac{8}{5},$$

da cui

$$p = ra = \frac{8}{5}(2, 1) = (\frac{16}{5}, \frac{8}{5}).$$

4. **Prodotto interno**

Dati due vettori $a = (a_i)_1^n$ e $b = (b_i)_1^n$ di $\mathbb{R}^n$, il numero reale dato dalla somma dei prodotti delle componenti corrispondenti dei due vettori

$$\sum_1^n a_i b_i = \begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = a'b$$

viene detto *prodotto interno (standard)* di a per b.

Dalle proprieta' delle operazioni nell'algebra delle matrici discendono le seguenti proprieta' del prodotto interno:

$$\begin{aligned} (a+c)'b &= a'b + c'b \\ a'(b+d) &= a'b + a'd \\ (ra)'b &= a'(rb) = r(a'b), \end{aligned}$$

per ogni $a, b, c, d \in \mathbb{R}^n$ ed ogni $r \in \mathbb{R}$.

Osserviamo che scambiando i fattori il prodotto interno non cambia:

$$b'a = \sum_1^n b_i a_i = \sum_1^n a_i b_i = a'b;$$

percio' potremo dire "prodotto interno fra a e b," ed usare indifferentemente la forma $a'b$ o la forma $b'a$.

Osserviamo che il prodotto interno di un vettore con se' stesso e' la somma dei quadrati delle sue componenti:

$$a'a = \sum_1^n a_i^2,$$

dunque esso e' sempre maggiore-uguale a zero, ed e' zero se e solo se tutte le sue compnenti sono nulle, cioe' se e solo se e' il vettore nullo:

$$\begin{array}{lcc} a'a \geq 0, & & \forall a \in \mathbb{R}^n \\ a'a = 0, & \Leftrightarrow & a = 0_n \end{array}$$

L'insieme $\mathbb{R}^n$, con le operazioni di somma di vettori, di prodotto scalari per vettori, e di prodotto interno standard di vettori, si dice "spazio vettoriale euclideo $n-$dimensionale standard". [1]

[1] Dato uno spazio vettoriale V, un prodotto che prende in entrata due vettori di V e restituisce in uscita uno scalare in $\mathbb{R}$ e che soddisfa le proprieta' sopra evidenziate si dice *prodotto interno*. Ad esempio, per lo spazio vettoriale delle funzioni continue su un intervallo $[a, b]$, il prodotto che prende in entrata due funzioni $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ e restituisce in uscita lo scalare in $\mathbb{R}$ dato da

$$\int_a^b f(x)g(x)\, \mathrm{dx}$$

e' un prodotto interno.

5. **Matrice trasposta**

Siano m ed n due interi positivi fissati. Data una matrice A di tipo $m \times n$, riscrivendo per colonne cio' che in A compare per righe (o, che e' lo stesso, riscrivendo per righe cio' che in A compare per colonne), si ottiene una matrice di tipo $n \times m$, detta matrice trasposta di A; ed indicata con A^T, o con A' (noi useremo questa seconda notazione). In simboli, si ha:

$$A'(i,j) = A(j,i), \qquad i = 1,\ldots,n,\ j = 1,\ldots,m.$$

Ad esempio, si ha

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, \qquad A' = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

L'operazione di trasposizione possiede le seguenti proprieta':

$(A')' = A,$

per ogni matrice A;

$(A+B)' = A' + B'$

per ogni coppia A, B di matrici sommabili;

$(AB)' = B'A'$

per ogni coppia A, B di matrici moltiplicabili;

$(rA)' = rA'$

per ogni matrice A ed ogni scalare r.

Dimostriamo la proprieta' relativa alla moltiplicazione di matrici. Sia dunque A una matrice di tipo $m \times n$ e sia B una matrice di tipo $n \times p$. Proviamo innanzitutto che l'uguaglianza

$$(AB)' = B'A'$$

e' consistente, cioe' che le matrici ai due lati dell'uguaglianza sono definite hanno lo stesso tipo. Infatti: da un lato, la matrice AB e' definita ed ha tipo $m \times p$, e la matrice $(AB)'$ ha tipo $p \times m$; dall'altro, la matrice B' ha tipo $p \times n$, la matrice A' ha tipo $n \times m$, e la matrice $B'A'$ e' definita ed ha tipo $p \times m$.

Proviamo ora che

$$(AB)'(i,j) = (B'A')(i,j), \qquad i = 1,\ldots,p,\ j = 1,\ldots,m.$$

Infatti: al primo membro si ha

$$\begin{aligned}(AB)'(i,j) &= (AB)(j,i) \\ &= \sum_{h=1}^{n} A(j,h)B(h,i),\end{aligned}$$

al secondo membro si ha

$$(B'A')(i,j) = \sum_{h=1}^{n} B'(i,h)A'(h,j)$$
$$= \sum_{h=1}^{n} B(h,i)A(j,h),$$

e i due risultati sono uguali per la proprieta' commutativa della moltiplicazione di numeri reali.

Al paragrafo precedente abbiamo visto in particolare che per ogni $a \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$a'a \neq 0 \quad \textit{se e solo se} \quad a \neq 0 \ (\in \mathbb{R}^n).$$

Piu' in generale si ha il seguiente Teorema, che non dimostriamo.

Teorema 1 *Sia A una matrice di tipo $p \times q$, e sia A' la sua trasposta, di tipo $q \times p$. Sono equivalenti:*

-la matrice $A'A$, quadrata di ordine $q \times q$, e' invertibile;

-le colonne di A sono linearmante indipendenti.

Osserviamo che se una, e dunque entrambe le condizioni sono soddisfatte, allora in particolare si deve avere $q \leq p$, cioe' la matrice A deve essere rettangolare alta.

6. **Ortogonalita' nello spazio**

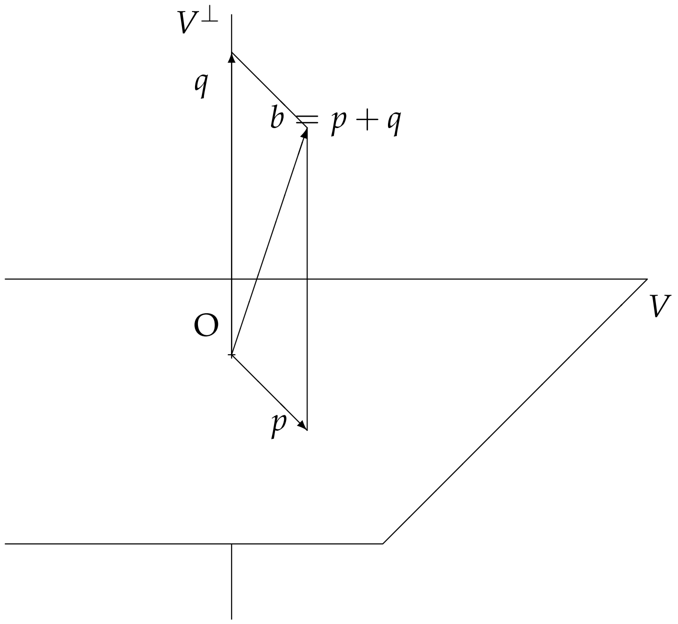
Fissato nello spazio un punto O, consideriamo i vettori dello spazio applicati in O. La nozione di ortogonalita' fra due vettori non nulli dello spazio applicati in O deriva direttamente dalla nozione corrispondente nel piano. Adottiamo le stesse convenzioni e notazioni che abbiamo adottato nel piano.

Osserviamo che i vettori ortogonali a un dato vettore $v \neq 0$ descrivono un piano, e che i vettori ortogonali a due dati vettori v, w non allineati descrivono una retta.

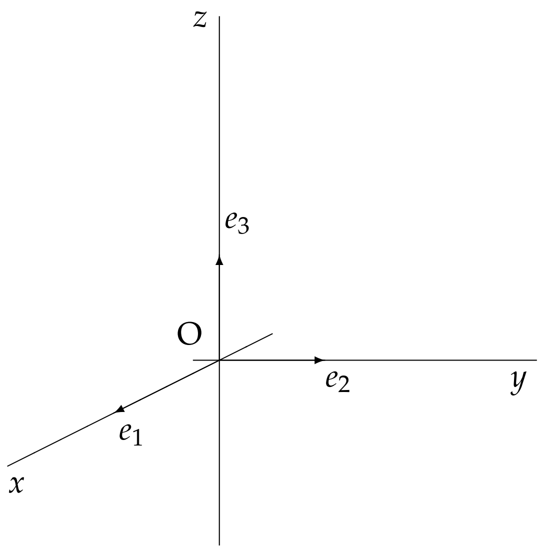
Dato un piano V per O, sia $V^{\perp}$ la retta per O ortogonale a V. Ogni vettore b si puo' scomporre in uno ed un solo modo come somma di un vettore p sul piano V ed un vettore q sulla retta $V^{\perp}$

$$b = p + q$$
$$p \in V$$
$$q \in V^{\perp}$$

Diciamo che p e' la proiezione ortogonale di b sul piano V, e che q e' la proiezione ortogonale di b sulla retta $V^{\perp}$.



7. Fissato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico con origine in O, identifichiamo l'insieme dei vettori applicati in O con $\mathbb{R}^3$.



Fatto 2 *Due vettori $a = (a_i)_{i=1}^3$ e $b = (b_i)_{i=1}^3$ sono ortogonali se e solo se la somma dei prodotti delle componenti corrispondenti e' nulla:*

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0.$$

Ora,

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = a'b.$$

Sinteticamente, abbiamo dunque ancora che

$$a \perp b \quad \textit{se e solo se} \quad a'b = 0.$$

Noi sappiamo che, per costruzione, i vettori $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$ della base canonica di $\mathbb{R}^3$ sono a due a due ortogonali. Cio' si ritrova anche algebricamente, in quanto

$e_1'e_2 = 1 \cdot 0 \,+\, 0 \cdot 1 \,+\, 0 \cdot 0 = 0,$
$e_1'e_3 = 1 \cdot 0 \,+\, 0 \cdot 0 \,+\, 0 \cdot 1 = 0,$
$e_2'e_3 = 0 \cdot 0 \,+\, 1 \cdot 0 \,+\, 0 \cdot 1 = 0.$

Possiamo anche ritrovare il fatto che i vettori che stanno sul piano xy sono ortogonali ai vettori che stanno sull'asse z. Infatti, i primi sono del tipo $a = (a_i)_{i=1}^3$ con $a_3 = 0$, i secondi sono del tipo $b = (b_i)_{i=1}^3$ con $b_1 = b_2 = 0$, e si ha $a'b = a_1 0 + a_2 0 + 0 b_3 = 0$.

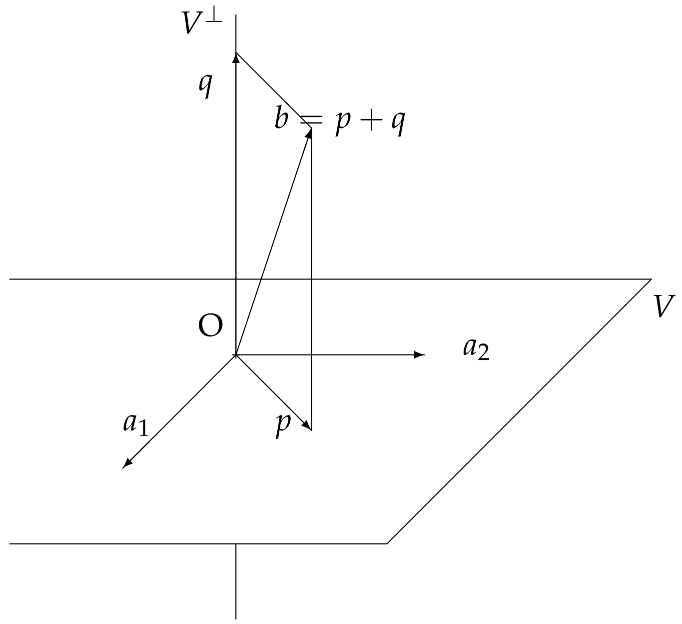
8. Vediamo ora come la costruzione della proiezione ortogonale di un vettore b applicato in O su un piano V per O si possa effettuare algebricamente.

   Descriviamo il piano V come l'insieme dei vettori combinazioni lineari di due vettori non allineati a_1, a_2, in altri termini come il sottospazio generato dai due vettori linermente indipendenti a_1, a_2 :

$$V = \{r_1 a_1 + r_2 a_2;\ r_1, r_2 \in \mathbb{R}\} = \langle a_1, a_2 \rangle.$$

   Si ha che un vettore q appartiene alla retta $V^\perp$ se e solo se e' ortogonale ad a_1 ed ad a_2, cioe' se e solo se

$$a_1'q = 0, \quad e \quad a_2'q = 0.$$



Per fissare le idee, supponiamo che

$$a_1 = (1, 0, -1), \quad a_2 = (0, 1, -1), \quad b = (0, 1, 1).$$

Cerchiamo dunque due vettori p, q che soddisfino le condizioni:

$$\begin{aligned}
&b = p + q \\
&p = r_1 a_1 + r_2 a_2, \\
&a_1' q = 0, \quad a_2' q = 0
\end{aligned}$$

dove $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ sono due scalari incogniti; r_1, r_2 sono le coordinate del vettore p di V rispetto alla base a_1, a_2 di V.

Prima di procedere, conviene rappresentare le condizioni su p e q in modo piu' sintetico.

Identificando le terne ordinate con matrici colonna 3×1, si ha che

$$p = r_1 a_1 + r_2 a_2 = \left[\begin{array}{c|c} a_1 & a_2 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} r_1 \\ r_2 \end{array} \right],$$

e che le condizioni $a_1' q = 0$, $a_2' q = 0$ si possono riscrivere nella forma

$$\left[\begin{array}{c} a_1' \\ \hline a_2' \end{array} \right] q = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right].$$

Percio', posto $A = \left[\begin{array}{c|c} a_1 & a_2 \end{array} \right]$, ed osservato che $\left[\begin{array}{c} a_1' \\ \hline a_2' \end{array} \right] = A'$, possiamo scrivere le condizioni su p e q nella forma

$$\begin{aligned}
&p = Ar, \quad r \in \mathbb{R}^2, \\
&A'q = 0_2.
\end{aligned}$$

Cerchiamo dunque due vettori p, q che soddisfino le condizioni:

$$\begin{aligned}
b &= p + q \\
p &= Ar, \\
A'q &= 0,
\end{aligned}$$

dove $r \in \mathbb{R}^2$ e' un vettore incognito.

Sostituendo l'espressione di p in funzione di r nella prima condizione

$$b = Ar + q,$$

e moltiplicando a sinistra per A' entrambe i membri si ha

$$A'b = A'(Ar + q),$$

cioe'

$$A'b = A'A\,r + A'q,$$

da cui, per la terza condizione, si ha

$$A'b = A'A\,r,$$

o

$$A'A\,r = A'b.$$

Dal fatto che le colonne di A sono linearmente indipendenti, per il teorema sopra riportato si ha che la matrice quadrata $A'A$ e' invertibile. Si ha cosi' una ed una sola soluzione:

$$r = \left(A'A\right)^{-1} A'b,$$

dalla quale si ottiene

$$p = Ar = A\left(A'A\right)^{-1} A'b.$$

Il vettore $(A'A)^{-1} A'b$ in $\mathbb{R}^2$ si puo' dire coefficiente di Fourier del vettore b rispetto alla matrice A; esso fornisce le coordinate della proiezione ortogonale di b su V rispetto alla base a_1, a_2 di V.

Nel caso in esame, si ha

$$A = \left[\begin{array}{c|c} a_1 & a_2 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

dunque

$$r = \left(A'A\right)^{-1} A'b = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

e

$$p = Ar = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$