Lezioni del 29 settembre e 1 ottobre.

1. **Funzioni iniettive, suriettive, biiettive.**

   Sia $f : A \to B$ una funzione da un insieme A ad un insieme B. Sia $a \in A$ e sia $b = f(a) \in B$ l'elemento che f associa ad a, allora si dice che "f manda a in b" oppure, "b proviene da a tramite f" oppure "b e' l'immagine di a tramite f".

   Sia $f : A \to B$ una funzione da un insieme A a un insieme B.

   - f si dice "iniettiva" se e solo se
     per ogni $a_1, a_2 \in A$ con $a_1 \neq a_2$ si ha $f(a_1) \neq f(a_2)$; equivalentemente:
     per ogni $a_1, a_2 \in A$ con $f(a_1) = f(a_2)$ si ha $a_1 = a_2$; equivalentemente:
     per ogni $b \in B$ esiste al piu' un $a \in A$ tale che $f(a) = b$.
   - f si dice "suriettiva" se e solo se
     per ogni $b \in B$ esiste almeno un $a \in A$ tale che $f(a) = b$.
   - f si dice "biiettiva" se e solo se e' sia iniettiva che suriettiva, cioe':
     per ogni $b \in B$ esiste uno ed un solo $a \in A$ tale che $f(a) = b$.

   I tre concetti si possono descrivere in modo unitario dicendo che f e' iniettiva, suriettiva, biiettiva se e solo se per ogni $b \in B$ l'equazione

   $$f(a) = b$$

   nell'incognita $a \in A$ ha al piu' una soluzione, almeno una soluzione, una ed una sola soluzione. Geometricamente: f e' iniettiva, suriettiva, biiettiva se e solo se ogni retta parallela all'asse x che interseca B interseca il grafico di f in al piu' un punto, in almeno un punto, in uno ed un solo punto.

2. **Esempi**

   - Ciascuna funzione polinomiale di primo grado
     $$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = mx + q, \qquad (m, q \textit{ costanti in } \mathbb{R} \textit{ e } m \neq 0)$$
     e' biiettiva. Ne diamo due motivazioni. Prima: per ogni $y \in \mathbb{R}$ l'equazione
     $$mx + q = y$$
     nell'incognita $x \in \mathbb{R}$ ha una ed una sola soluzione, data da
     $$x = \frac{1}{m}y - \frac{q}{m}.$$
     Seconda: il grafico di f e' una retta non parallela all'asse x, e dunque ogni retta parallela all'asse x lo interseca in esattamente un punto.
   - Ciascuna funzione costante
     $$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = q \qquad (q \textit{ costante in } \mathbb{R})$$
     non e' ne' iniettiva ne' suriettiva.

- La funzione potenza di secondo grado

  $$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = x^2,$$

  non e' iniettiva e non e' suriettiva. Ne diamo due motivazioni. Prima: per ciascun $y \in \mathbb{R}$ consideriamo l'equazione

  $$x^2 = y$$

  nell'incognita $x \in \mathbb{R}$; questa equazione per $y > 0$ ha due soluzioni distinte $x = \pm\sqrt{y}$ e dunque g non e' iniettiva, e per $y < 0$ non ha soluzioni e dunque g non e' suriettiva.

  Seconda: il grafico di g e' una parabola con asse parallelo all'asse y, fra le rette parallele all'asse x ce ne sono alcune che intersecano la parabola in due punti distinti e dunque g non e' iniettiva, e ce ne sono alcune che non intersecano la parabola in alcun punto e dunque g non e' suriettiva.

- La funzione potenza di terzo grado

  $$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(x) = x^3,$$

  e' biiettiva. Infatti, per ciascun $y \in \mathbb{R}$ l'equazione

  $$x^3 = y$$

  nell'incognita $x \in \mathbb{R}$ ha una ed una sola soluzione $x = \sqrt[3]{y}$. D'altro canto, considerando l'immagine che ci siamo fatti del grafico della funzione potenza di terzo grado si puo' informalmente convincesi del fatto che ogni retta parallela all'asse x lo interseca in uno ed un solo punto.

- La funzione

  $$i : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}, \quad i(x) = x^{-1}$$

  e' iniettiva, ma non suriettiva.

- La funzione esponenziale di base 2 data da

  $$k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad k(x) = 2^x$$

  e' iniettiva ma non suriettiva. Per ciascun $y \in \mathbb{R}$ consideriamo l'equazione

  $$2^x = y$$

  nell'incognita $x \in \mathbb{R}$; questa equazione per $y > 0$ ha una ed una sola soluzione $x = \log_2 y$ e per $y \leq 0$ non ha soluzioni, dunque k e' iniettiva ma non suriettiva.

Osservazione. Se $f : A \to B$ (con $A, B \subseteq \mathbb{R}$) e' una funzione strettamente crescente su A, oppure strettamente decrescente su A, allora f e' iniettiva; lo si provi usando la prima formulazione della nozione di funzione iniettiva.

3. Negli esempi precedenti, eventualmente riducendo dominio e codominio, si puo' fare in modo da ottenere una funzione biiettiva.

   - Consideriamo di nuovo la funzione potenza di secondo grado $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$, che non e' ne' iniettiva ne' suriettiva; restringendo opportunamente il dominio si ha una nuova funzione $g_1 : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$,

$g_1(x) = x^2$, che e' iniettiva, ma non suriettiva; restringendo opportunamente anche il codominio si ha una nuova funzione

$$g_2 : [0, +\infty[\to [0, +\infty[, \quad g_2(x) = x^2,$$

che e' sia iniettiva che suriettiva, cioe' biiettiva.

- Consideriamo di nuovo la funzione esponenziale $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $k(x) = 2^x$, che non e' suriettiva; restringendo opportunamente il codominio si ha una nuova funzione

  $$k_1 : \mathbb{R} \to]0, +\infty[, \quad k_1(x) = 2^x,$$

  che e' sia iniettiva che suriettiva, cioe' biiettiva.

4. **Funzione inversa**

Sia $f : A \to B$ una funzione biiettiva. La legge che associa a ciascun elemento $b \in B$ l'unica soluzione dell'equazione $f(a) = b$ nell'incognita $a \in A$ definisce una funzione $B \to A$, detta "funzione inversa di f" e denotata da f^{-1}. In altri termini, la funzione inversa di f e' la funzione $f^{-1} : B \to A$ definita da

$$f^{-1}(b) = a \quad \Leftrightarrow \quad f(a) = b.$$

Alcuni esempi:

- Ciascuna funzione polinomiale di primo grado

  $$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = mx + q,$$

  e' biiettiva; la sua funzione inversa e' la funzione polinomiale di primo grado

  $$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f^{-1}(y) = \frac{1}{m}y - \frac{q}{m};$$

  se si indica con x il generico elemento di $\mathbb{R}$, si ha

  $$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f^{-1}(x) = \frac{1}{m}x - \frac{q}{m}.$$

- Per ogni numero intero positivo pari $n = 2m$, la funzione potenza $n-$ma

  $$g : [0, +\infty[\to [0, +\infty[, \quad g(x) = x^n,$$

  e' biiettiva; la sua funzione inversa e' data dalla funzione radice $n-$ma

  $$g^{-1} : [0, +\infty[\to [0, +\infty[, \quad g^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}.$$

- Per ogni numero intero positivo dispari $n = 2m + 1$, la funzione potenza $n-$ma

  $$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(x) = x^n,$$

  e' biiettiva; la sua funzione inversa e' data dalla funzione radice $n-$ma

  $$h^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}.$$

- Ciascuna funzione esponenziale di base b con $0 < b \neq 1$

  $$k : \mathbb{R} \to]0, +\infty[, \quad k(x) = b^x$$

  e' biiettiva; la sua funzione inversa e' data dalla funzione logaritmo in base b

  $$k^{-1} :]0, +\infty[\to \mathbb{R}, \quad k^{-1}(x) = \log_b x.$$

Osservazione. Si ha che se una funzione biiettiva $f : A \to B$ e' strettamente crescente su A, allora la sua funzione inversa $f^{-1} : B \to A$ e' strettamente crescente su B, e viceversa. Analogamente per funzioni strettamente decrescenti.

5. **Grafico della funzione inversa**

Consideriamo la funzione polinomiale di primo grado $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 3$; il suo grafico e' la retta di equazione

$$y = 2x + 3.$$

La funzione inversa f^{-1} e' la funzione polinomiale di primo grado $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}$; il suo grafico e' la retta di equazione

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}.$$

Rappresentando le due rette si e' condotti ad osservare che esse sono simmetriche rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante. Non e' un caso.

> Sia $f : A \to B$ una funzione biiettiva e sia $f^{-1} : B \to A$ la sua inversa. Allora i grafici di f e di f^{-1} sono uno il simmetrico dell'altro rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante.

Infatti, due punti del piano sono simmetrici rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante se e solo se le coordinate dell'uno sono le coordinate dell'altro nell'ordine opposto, e si ha

$$\begin{aligned} Graf(f) &= \{(a,b) \in A \times B : \ f(a) = b\} \\ Graf(f^{-1}) &= \{(b,a) \in B \times A : \ f^{-1}(b) = a\} \\ &= \{(b,a) \in B \times A : \ f(a) = b\} \end{aligned}$$

Come conseguenza di questo fatto, si ha che:

per ogni intero positivo n, il grafico della funzione radice $n-$ma e' il simmetrico, rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante, del grafico della funzione potenza $n-$ma;

per ogni $b \in \mathbb{R}$ con $0 < b \neq 1$, il grafico della funzione logaritmo in base b e' il simmetrico, rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante, del grafico della funzione esponenziale in base b.

6. **Composizione di funzioni**

Siano date una prima ed una seconda funzione, tali che il codominio della prima sia contenuto nel dominio della seconda $f : A \to B$, $B \subset C$, $g : C \to D$; a ciascun elemento x in A la funzione f associa l'elemento $f(x)$ che sta in B, e dunque sta in C, e a $f(x)$ la funzione g associa l'elemento $g(f(x))$ in D; si ha cosi' una funzione da A a D che viene detta "funzione composta di g dopo f", in breve "g dopo f", e viene indicata con $g \circ f$; dunque

$$g \circ f: \ A \to D, \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Ad esempio, siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, le funzioni date da $f(x) = x + 1$ e $g(x) = x^2$; allora la funzione $g \circ f: \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e' data da

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x+1) = (x+1)^2$$

e la funzione $f \circ g: \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e' data da

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = x^2 + 1.$$

La definizione di composizione di funzioni si estende in modo naturale a una sequenza ordinata di tre o piu' funzioni tali che il codominio di ciascuna sia contenuto nel dominio della successiva.

Cio' che spesso si fa e' scomporre una funzione complessa come composizione di funzioni semplici. Ad esempio, la funzione

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(x) = 2^{4x+3} + 1;$$

puo' essere ottenuta componendo nell'ordine le funzioni

$$\begin{aligned} a &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad a(x) = 4x + 3; \\ b &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad b(x) = 2^x; \\ c &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad c(x) = x + 1, \end{aligned}$$

dunque

$$h = c \circ b \circ a.$$

7. Data una legge che a ciascun elemento di $\mathbb{R}$ associa al piu' un elemento di $\mathbb{R}$ (eventualmente nessuno), si ha in modo naturale una funzione, che ha come dominio l'insieme degli elementi di $\mathbb{R}$ cui la legge associa uno (e dunque un solo) elemento di $\mathbb{R}$, ed ha come codominio $\mathbb{R}$ stesso.

   Ad esempio, consideriamo la legge

   $$x \mapsto \frac{1}{1 - 2\sqrt{1 - x^2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

   Gli elementi di $\mathbb{R}$ cui questa legge associa un elemento di $\mathbb{R}$ sono i valori di x per i quali sono definite la radice quadrata e la frazione, sono cioe' le soluzioni del sistema di disequazioni

   $$\begin{cases} 1 - x^2 \geq 0 \\ 1 - 2\sqrt{1 - x^2} \neq 0 \end{cases};$$

l'insieme delle soluzioni di questo sistema e' l'intervallo $[-1,1]$ privato dei punti $\sqrt{3}/2$ e $-\sqrt{3}/2$; dunque si ha la funzione

$$f : [-1,1] - \{\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{1-2\sqrt{1-x^2}}.$$

La funzione f puo' essere scomposta come

$$f = d \circ c \circ b \circ a, \quad dove$$
$$a(x) = 1 - x^2, \quad b(x) = \sqrt{x}, \quad c(x) = 1-2x \quad d(x) = \frac{1}{x},$$

dove una scelta ammissibile di domini e i codomini per a, b, c, d e' data da

$$d : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}, \quad c : \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\} \to \mathbb{R} - \{0\},$$
$$b : \mathbb{R}_{\geq 0} - \{\frac{1}{4}\} \to \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}, \quad a : [-1,1] - \{\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\} \to \mathbb{R}_{\geq 0} - \{\frac{1}{4}\}$$

8. **Caratterizzazione della funzione inversa**

Una funzione $f : A \to B$ biiettiva e la sua funzione inversa $f^{-1} : B \to A$ soddisfano le relazioni

$$f^{-1} \circ f = id_A, \quad f \circ f^{-1} = id_B,$$

dove id_A e id_B sono le funzioni identiche su A e B. Queste relazioni caratterizzano la funzione inversa di f, nel senso che se $g : B \to A$ e' una funzione tale che $g \circ f = id_A$, e $f \circ g = id_B$, allora $g = f^{-1}$.

In particolare si ha che:

per ogni numero intero positivo pari n, la funzione radice $n-$ma e' caratterizzata dalle relazioni

$$\sqrt[n]{x^n} = x, \quad \left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x, \qquad (x \in \mathbb{R}_{\geq 0} \ per\ n\ pari,\ x \in \mathbb{R},\ per\ n\ dispari);$$

per ogni numero reale b con $0 < b \neq 1$, la funzione logaritmo in base b e' caratterizzata dalle relazioni

$$\log_b(b^x) = x, \qquad (x \in \mathbb{R}),$$
$$b^{\log_b(x)} = x, \qquad (x \in \mathbb{R}_{>0}).$$