Lezioni del 29 settembre e 1 ottobre.

1. Ricordiamo informalmente e brevemente la nozione di angolo e di misura di un angolo in radianti nel senso della geometria elementare. Per "angolo" intendiamo una parte di piano α delimitata da due semirette aventi la stessa origine O; su ciascuna circonferenza centrata in O l'angolo α individua un arco; si prova che il quoziente della lunghezza dell'arco sul raggio della circonferenza e' una costante indipendente dalla circonferenza; questa costante viene detta "misura in radianti" dell'angolo α; la misura in radianti di α puo' essere pensata come il numero reale ottenuto considerando la circonferenza di raggio unitario con centro O, l'arco individuato da α su di essa, e prendendo la lunghezza di questo arco. Si ha dunque che l'angolo giro ha per misura in radianti la lunghezza della circonferenza di raggio unitario, cioe' 2π.

2. **Coseno e seno**

   Descriviamo le funzioni trigonometriche a partire da una movimento periodico che descriviamo informalmente.

   Consideriamo un punto materiale P che si muove uniformemente su una circonferenza di raggio 1 con centro un punto O, percorrendo in senso antiorario un arco di circonferenza di lunghezza 1 ogni unita' di tempo, e sia P_t il punto in cui il punto materiale P si trova al tempo t. Supponiamo che questo movimento avvenga da sempre e per sempre, cosicche' t vari in tutto $\mathbb{R}$. Essendo la lunghezza della circonferenza 2π, si avra' che

   $$P_{t+2\pi} = P_t \quad \textit{per ogni } t \in \mathbb{R}.$$

   Per valori compresi fra 0 e 2π il numero reale t coincide con la misura in radianti dell'angolo avente per lati le semirette OP_0 e OP_t e contenente i punti P_u con $0 \leq u \leq t$ (P_0 e' il punto occupato dal punto materiale al tempo $t = 0$).

   Fissiamo nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale che abbia origine in O, punto untita' dell'asse x coincidente con P_0, e punto untita' dell'asse y coincidente con $P_{\frac{\pi}{2}}$.

   Per ogni $t \in \mathbb{R}$ definiamo il coseno $\cos(t)$ di t come l'ascissa di P_t e definiamo il seno $\sin(t)$ di t come l'ordinata di P_t; in altri termini, indicate con A_t e B_t le proiezioni ortogonali di P_t sull'asse x e sull'asse y, definiamo

   $$\cos(t) = OA_t, \quad \sin(t) = OB_t,$$

   (qui OA_t indica la misura con segno del segmento orientato di estremi O e A_t; analogo significato ha OB_t).

   Dal fatto che il punto P_t sta sempre sulla circonferenza di raggio 1 con centro nell'origine del sistema di riferimento, e che questa circonferenza ha equazione

$x^2 + y^2 = 1$, si ha che

$$\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1, \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Per ogni t i punti P_t e P_{-t} sono simmetrici rispetto all'asse x, dunque si ha che $A_t = A_{-t}$ e che B_t e B_{-t} sono simmetrici rispetto all'asse x, cosi'

$$\cos(-t) = \cos(t), \quad \sin(-t) = -\sin(t), \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

3. Per la scelta del sistema di riferimento e per l'ipotesi sul moto del punto materiale si ha

$$P_0 = (1,0),\ P_{\pi/2} = (0,1),\ P_\pi = (-1,0),\ P_{3\pi/2} = (0,-1),\ P_{2\pi} = (1,0),$$

dunque si hanno i seguenti valori ovvi di coseno e seno

t	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$\cos(t)$	1	0	-1	0	1
$\sin(t)$	0	1	0	-1	0

Alcuni altri valori si ricavano con considerazioni geometriche:

t	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$
$\cos(t)$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$
$\sin(t)$	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$

Mostriamo ad esempio come si ricavano i valori seno e coseno per $t = \pi/6$.

Per ciascun valore di t con $0 \leq t \leq \pi$ si ha che il triangolo P_tOP_{-t} e' isoscele sulla base $P_{-t}P_t$, ha angolo $\widehat{O} = 2t$, altezza $\cos(t)$ e base $2\sin(t)$.

Per $t = \pi/6$ questo triangolo ha angoli $\widehat{O} = \widehat{P_t} = \widehat{P_{-t}} = \pi/3$, dunque e' equilatero di lato 1, e si ha

$$2\sin(t) = 1, \quad e \quad \cos(t) = \sqrt{1^2 - \sin^2(t)},$$

da cui $\sin(t) = 1/2$ e $\cos(t) = \sqrt{3}/2$.

Per compito si dia una rappresentazione del grafico della funzione coseno sull'intervallo $[0, 2\pi]$ coerente con le informazioni ricavate. Lo stesso per la funzione seno.

4. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione e sia $p \in \mathbb{R}_{>0}$ un numero reale positivo. Diciamo che f e' periodica di periodo p se e solo se p e' il minimo numero reale positivo tale che

$$f(x+p) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Se una tale funzione e' nota su un intervallo di ampiezza p, allora essa e' nota su tutto $\mathbb{R}$.

Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ si dice: "inferiormente limitata" su A se esiste una costante $a \in \mathbb{R}$ tale che $a \leq f(x)$ per ogni $x \in A$; "superiormente limitata" su A se esiste una costante $b \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) \leq b$ per ogni $x \in A$; "limitata" se e' sia inferiormente che superiormente limitata.

La funzione $x \mapsto \cos(x)$, $x \in \mathbb{R}$ e'

- periodica di periodo 2π. Infatti si ha $P_t = P_{t+2\pi}$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ e dunque si ha pure
$$\cos(x + 2\pi) = \cos(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$
Inoltre 2π e' il piu' piccolo numero reale positivo con questa proprieta': se q e' un qualsiasi numero reale con $0 < q < 2\pi$ si ha che esiste un $x \in \mathbb{R}$ tale che $\cos(x + q) \neq \cos(x)$; precisamente, per $x = 0$ si ha $\cos(0 + q) = \cos(q) < 1 = \cos(0)$.
- limitata:
$$-1 \leq \cos(x) \leq 1, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$
- pari:
$$\cos(-x) = \cos(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

La funzione $x \mapsto \sin(x)$, $x \in \mathbb{R}$ e'

- periodica di periodo 2π. Infatti si ha $P_t = P_{t+2\pi}$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ e dunque si ha pure
$$\sin(x + 2\pi) = \sin(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$
Inoltre 2π e' il piu' piccolo numero reale positivo con questa proprieta': se q e' un qualsiasi numero reale con $0 < q < 2\pi$ si ha che esiste un $x \in \mathbb{R}$ tale che $\sin(x + q) \neq \sin(x)$; precisamente, per $x = \pi/2$ si ha $\sin(\pi/2 + q) < 1 = \sin(\pi/2)$.
- limitata:
$$-1 \leq \sin(x) \leq 1, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$
- dispari:
$$\sin(-x) = -\sin(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

5. **Tangente**

Consideriamo una retta r che ruota uniformemente in senso antiorario attorno ad un suo punto vincolato O in modo che una sua semiretta con origine O descriva un angolo di un radiante ogni unita' di tempo, e sia r_t la retta r al tempo t. Supponiamo che questo movimento avvenga da sempre e per sempre, cosicche' t vari in tutto $\mathbb{R}$. Si avra' che

$$r_{t+\pi} = r_t \quad \textit{per ogni } t \in \mathbb{R}.$$

Fissiamo nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale che abbia origine in O, asse x coincidente con r_0, e asse y coincidente con $r_{\frac{\pi}{2}}$ (orientati in modo coerente con la rotazione di r).

La retta r_t, tranne nei casi in cui sia perpendicolare all'asse x, ha una sua ben definta pendenza; definiamo la tangente $\tan(t)$ di t come la pendenza della retta r_t; in altri termini, considerato il punto unita' U sull'asse x e la retta u passante per U e perpendicolare all'asse x, la retta r_t interseca u in un punto R_t e definiamo la tangente $\tan(t)$ di t ponendo

$$\tan(t) = \frac{UR_t}{OU} = UR_t$$

(qui UR_t indica la misura con segno del segmento orientato di estremi U e R_t, analogamente per OU che dunque vale 1).

Possiamo pensare che la retta r_t sia la retta per il punto O ed il punto P_t che si muove di moto uniforme sulla circonferenza di centro O e raggio 1, percorrendo in senso antiorario un arco di lunghezza 1 ogni unita' di tempo; il sistema di riferimento associato alla rotazione della retta coincide con quello associato alla rotazione del punto.

Osserviamo che i triangoli OUR_t e OA_tP_t sono simili e dunque si ha

$$\tan(t) = \frac{UR_t}{OU} = \frac{A_tP_t}{OA_t} = \frac{\sin(t)}{\cos(t)}$$

cosi'

$$\tan(t) = \frac{\sin(t)}{\cos(t)}, \qquad \forall t \neq \ldots, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \ldots$$

6. Dai valori sopra riportati di coseno e seno si ricavano i seguenti valori della tangente:

t	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$
$\tan(t)$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$

Per ogni t_1, t_2 con $-\pi/2 < t_1 < t_2 < \pi/2$ la pendenza della retta r_{t_1} e' minore della pendenza della retta r_{t_2} dunque la funzione tangente e' strettamente crescente sull'intervallo $]-\pi/2, \pi/2[$.

Per compito si dia una rappresentazione del grafico della funzione tangente sull'intervallo $]-\pi/2, \pi/2[$.

La funzione $x \mapsto \tan(x)$, e' definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ tale che $x \neq \pi/2 + k\pi$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$; e' periodica di periodo π, illimitata, e dispari.

7. **Funzioni elementari**

Per "funzioni elementari" intendiamo tutte le funzioni ottenibili a partire dalle funzioni

-costanti,
-potenza (a esponente intero, intero relativo, razionale, reale)
-esponenziali, logaritmiche,
-trigonometriche (seno, coseno, tangente, ...)

mediante operazioni di

-composizione,
-somma (sottrazione), prodotto (divisione).

Le operazioni di somma, differeza, prodotto, divisione sono definte punto a punto: date due funzioni $f, g : A \to \mathbb{R}$ poniamo

$$f + g : A \to R, \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$fg : A \to R, \quad (fg)(x) = f(x)g(x)$$
$$\frac{f}{g} : A \to R, \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

dove la funzione $\frac{f}{g}$ e' definita sotto le ovvie condizioni.

Compito:

dare una rappresentazione del grafico della funzione somma delle funzioni $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ date da $f(x) = 2^x$ e $g(x) = x$;

dare una rappresentazione del grafico della funzione prodotto delle funzioni $h, k : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ date da $h(x) = 2^{-x}$ e $k(x) = \sin(x)$.

In particolare, fra le funzioni elementari ci sono le funzioni polinomiali

$$p(x) = c_n x^n + + \cdots + c_1 x + c_0.$$

Vedremo come lo studio dell'andamento di una funzione elementare nelle vicinanze di un punto possa essere effettuato approssimando la funzione nelle vicinanze del punto con un certo polinomio; per molte questioni bastera' approssimare con polinomi di grado al piu' uno, al massimo due; i coefficienti di questi polinomi saranno forniti dalle "derivate" della funzione nel punto; il concetto di derivata e' basato sul concetto di "limite".

Limiti. Limiti di successioni.

Di seguito diamo una introduzione all'argomento.

- Archimede diede approssimazioni della lunghezza di una circonferenza tramite le lunghezze dei poligoni regolari inscritti e circoscritti; indicata formalmente con $2\pi r$ la lunghezza di una circonferenza di raggio 1 ed indicati con $a_3, a_4, a_5, \ldots$ le lunghezze dei poligoni regolari con $3, 4, 5, \ldots$ lati inscritti nella circonferenza, una volta introdotto il concetto di limite, esprimeremo il risultato di Archimede dicendo che il "limite di a_n per n che tende all'infinito e' 2π", oppure che "a_n tende a 2π per n che tende all'infinito". In senso stretto, nella visione moderna si ha che la lunghezza di una curva (sotto dovute condizioni) e' proprio definita come limite di lunghezze di certe spezzate associate alla curva.

- Abbiamo introdotto i numeri reali mediante rappresentazioni decimali illimitate, inizialmente di numeri razionali. Anche restando nel campo dei razionali, si pone la questione di quale senso dare a queste scritture. Ad esempio, la scrittura $975,\bar{3}$ significa

$$9 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2} + \dots,$$

ma cosa significa sommare infiniti termini? Il concetto di "serie" di una successione, basato sul concetto di limite di una successione, ci permettera' di rispondere a questa domanda, e di avere una visione piu' adeguata dei numeri reali.

- E' naturale considerare la relazione che sussiste fra la lunghezza di una arco di circonferenza e la lunghezza della corda ad esso corrispondente, quando la lunghezza dell'arco e' "indefinitamente piccola". Esprimeremo questa questione considerando la successione

$$a_n = \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}, \qquad n = 1, 2, \dots$$

e chiedendoci se esiste il limite di a_n per n che tende all'infinto.

- Consideriamo una banca immaginaria che corrisponde ai suoi correntisti un interesse del 100% annuale sul capitale depositato, e che per certi correntisti l'interesse sia corrsiposto in un'unica soluzione, per altri in due soluzioni semestrali, per altri in tre soluzioni quadrimestrali, ...

  Si intende che se l'interesse del 100% annuale viene corrisposto in due soluzioni semestrali, in ciascuna di queste due soluzioni viene corrisposto un interesse semestrale del 50%; cosi' un deposito iniziale di un capitale unitario 1, dopo sei mesi diviene $1 + 1/2$ e al termine dell'anno diviene $1 + 1/2 + (1 + 1/2)1/2 = (1 + 1/2)^2$. In modo analogo si ha che se l'interesse del 100% annuale viene corrisposto in n soluzioni ogni parte $n-$ma di anno, in ciascuna di queste n soluzioni viene corrisposto un interesse semestrale del $(100/n)$ %; cosi' un deposito iniziale di un capitale unitario 1, al termine dell'anno diviene

$$(1 + 1/n)^n.$$

  Vedremo che questa successione per n che tende ad infinito ha limite il numero di Nepero $e = 2,718\dots$