Lezione del 26 settembre.

1. **Successioni.**

Definizione 1 *Una successione di numeri reali e' una legge che associa a ogni numero naturale $n = 0, 1, 2, \ldots$ un numero reale - in breve: e' una funzione $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$; si scrive nella forma*

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$$

o $(a_n)_{n=0}^{+\infty}$, o anche (a_n); per brevita', a volte si omettono le parentesi. Talvolta una successione si presenta dando qualche termine e facendo intuire i seguenti.

Si e' interessati al comportamento dei termini a_n della successione per valori di n "grandi"; dunque a_n potrebbe senza danno essere definita solo per n maggiore-uguale ad un certo naturale.

Una successione $(a_n)_{n=0}^{+\infty}$ puo' essere rappresentata con l'insieme delle coppie ordinate

$$(0, a_0),\ (1, a_1),\ (2, a_2),\ \ldots$$

pensate come punti del piano (il grafico della successione), oppure puo' essere rappresentata come il movimento a scatti temporali discreti di un punto su una retta.

Alcuni esempi:

- la successione a_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, data da
$$\left(-1, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \ldots\right),$$
cioe'
$$a_n = \frac{(-1)^n}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots;$$
viene da dire che a_n tende a 0 per n che tende a $+\infty$.
- la successione b_n, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, data da
$$(1, 3, 5, 7, \ldots)$$
cioe'
$$b_n = 2n + 1, \quad n = 0, 1, 2, \ldots;$$
viene da dire che b_n tende a $+\infty$ per n che tende a $+\infty$.
- la successione c_n, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, data da
$$(1, -1, 1, -1, 1, \ldots)$$
cioe'
$$c_n = (-1)^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots;$$
non viene da dire niente.

2. **Limiti. Limite finito.**

Definizione 2 *Diciamo che una successione (a_n) tende a un numero reale l per n che tende a $+\infty$, o che il il limite di a_n per n che tende a $+\infty$ e' uguale a l, e scriviamo*

$$a_n \to l \text{ per } n \to +\infty, \quad o \quad \lim_{n\to+\infty} a_n = l$$

se e solo se e' soddisfatta la seguente condizione: per ogni numero reale positivo ε esiste un indice (dipendente da ε) a partire dal quale tutti i termini della successione abbiano distanza da l minore di ε; in simboli:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} :\ (n \geq N\ \Rightarrow\ |a_n - l| < \varepsilon)$$

La condizione sopra scritta puo' essere espressa equivalentemente come segue: per ogni numero reale positivo ε esiste un indice (dipendente da ε) a partire dal quale tutti i termini della successione appartengano all'intervallo $]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$; in simboli:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} :\ (n \geq N\ \Rightarrow\ a_n \in]l-\varepsilon, l+\varepsilon[)$$

Spesso per brevita' si sottintende la locuzione "per n che tende a $+\infty$" e si si scrive $a_n \to l$ e $\lim a_n = l$.

3. **Esempi**

Di seguito, dato un numero reale r, indicheremo con $\lfloor r \rfloor$ il massimo intero minore uguale ad r, e con $\lceil r \rceil$ il minimo intero maggiore uguale ad r.

Consideriamo la successione a_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, data da

$$a_n = \frac{n}{n+1}, \quad cioe' \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots\right).$$

Intuitivamente si ha che a_n tende a 1 per n che tende a $+\infty$. Ci chiediamo se cio' e vero ai sensi della definizione data.

Consideriamo innanzitutto la disequazione " il termine $n-$mo della successione ha distanza dal presunto limite minore di ε " nell'incognita n, dove ε e' un parametro reale positivo:

$$\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon.$$

Questa disequazione ha per soluzioni gli $n \in \mathbb{N}$ tali che

$$n > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon},$$

o che e' lo stesso tali che

$$n \geq \left\lceil \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \right\rceil .$$

Si ha che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un indice a partire dal quale ogni termine della successione dista dal presunto limite per meno di ε; una scelta per questo indice e' $N(\varepsilon) = \lceil \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \rceil$. Dunque abbiamo provato che

$$\frac{n}{n+1} \to 1 \ per\ n \to +\infty.$$

Osservazione. Per $\varepsilon = 0,001$ si ha $N(\varepsilon) = 999$, cio' significa che tutti i termini della successione a partire dal $999-$mo distano da 1 per meno di $0,001$.

4. Consideriamo la successione a_n, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, data da

$$a_n = (-1)^n, \quad cioe' \quad (1, -1, 1, -1, \ldots) .$$

Intuitivamente si ha che a_n non tende ad alcun numero reale per n che tende a $+\infty$; in particolare a_n non tende ad 1.

Ci chiediamo se cio' e vero ai sensi della definizione data, nel senso della seconda formulazione. Ci chiediampo cioe' se e' vera l'affermazione

> " per ogni numero reale positivo ε esiste un indice a partire dal quale tutti i termini della successione appartengano all'intervallo $]1-\varepsilon, 1+\varepsilon[$ "

Osserviamo che per $\varepsilon = 1$ l'affermazione di sopra diviene

> " esiste un indice a partire dal quale tutti i termini della successione appartengano all'intervallo $]0, 2[$ "

Cio' e' falso (perche?). Dunque concludiamo che a_n non converge a 1.

5. **Limiti. Limite infinito.**

Definizione 3 *Diciamo che una successione (a_n) tende a $+\infty$ per n che tende a $+\infty$, o che il il limite di a_n per n che tende a $+\infty$ e' uguale a $+\infty$, e scriviamo*

$$a_n \to +\infty \ per\ n \to +\infty, \quad o \quad \lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$$

se e solo se per ogni numero reale H esiste un indice (dipendente da H) a partire dal quale tutti i termini della successione sono maggiori di H; in simboli:

$$\forall H \in \mathbb{R}\ \exists N = N(H) \in \mathbb{N} : \ (n \geq N \ \Rightarrow\ a_n > H)$$

Analogamente:

Definizione 4 *Diciamo che una successione (a_n) tende a $-\infty$ per n che tende a $+\infty$, o che il il limite di a_n per n che tende a $+\infty$ e' uguale a $-\infty$, e scriviamo*

$$a_n \to -\infty \text{ per } n \to +\infty, \quad o \quad \lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$$

se e solo se per ogni numero reale H esiste un indice (dipendente da H) a partire dal quale tutti i termini della successione sono minori di H; in simboli:

$$\forall H \in \mathbb{R}\ \exists N = N(H) \in \mathbb{N} : \ (n \geq N \ \Rightarrow \ a_n < H)$$

6. Consideriamo la successione a_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, data da

   $$a_n = -2n + 5, \quad cioe' \quad (5, 3, 1, \ldots).$$

   Intuitivamente si ha che a_n tende a $-\infty$ per n che tende a $+\infty$. Verifichiamo questa affermazione usando la definizione.

   Consideriamo innanzitutto la disequazione

   $$-2n + 5 < H$$

   nell'incognita n, dove H e' un parametro reale. Questa disequazione ha per soluzioni gli $n \in \mathbb{N}$ tali che

   $$n > \frac{5 - H}{2},$$

   o che e' lo stesso tali che

   $$n \geq \left\lceil \frac{5 - H}{2} \right\rceil.$$

   Si ha dunque che per ogni H esiste un indice a partire dal quale ogni termine della successione e' minore di H; una scelta per questo indice e' $N(\varepsilon) = \lceil \frac{5-H}{2} \rceil$. Abbiamo verificato che

   $$(-2n + 5) \to -\infty \text{ per } n \to +\infty.$$

7. **Successioni limitate**

   Diciamo che una successione (a_n) e' superiormente limitata se esiste un $K \in \mathbb{R}$ tale che

   $$a_n \leq K, \quad \forall n \in \mathbb{N};$$

   Analogamente si definiscono le succesioni inferiormente limitate. Una successione si dice limitata se e' superiormente e inferiormente limitata.

   Qualche esempio.

   - La successione $a_n = n/(n+1)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, e' limitata. Infatti $0 \leq a_n < 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

- La successione $b_n = 2^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, e' inferiormente limitata e superiormente illimitata.
- La successione $c_n = (-1)^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, e' limitata.

8. **Successioni elementari**

Le successioni elementari, cioe'

$$n^\alpha, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (\alpha \in \mathbb{R}),$$
$$b^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (b \in \mathbb{R}),$$
$$\log_b n, \quad n = 1, 2, \ldots \qquad (0 < b \neq 1),$$

per $n \to +\infty$ hanno il seguente comportamento

$$n^\alpha \to \begin{cases} +\infty & \alpha > 0 \\ 1 & \alpha = 0 \\ 0 & \alpha < 0 \end{cases}$$

$$b^n \to \begin{cases} +\infty & b > 1 \\ 1 & b = 1 \\ 0 & |b| < 1 \end{cases}$$

per $b = -1$, b^n non converge ad alcun limite; e' limitata;

per $b < -1$, b^n non converge ad alcun limite; e' illimitata;

$$\log_b n \to \begin{cases} +\infty & b > 1 \\ -\infty & 0 < b < 1 \end{cases}$$

Questi fatti si possono riconoscere come plausibili, considerando il grafico delle corrispondenti funzioni elementari; quasi tutti si possono anche dimostrare facilmente.

Esercizio Si dimostri che le successioni potenza con esponente intero relativo si comportano nel modo sopra descritto.

Esercizio Si dimostri che le successioni esponenziali si comportano nel modo sopra descritto.

9. **Estremo superiore**

Una variante della definizione di estremo superiore data in precedenza, equivalente a quella data in precedenza.

Definizione 5 *Sia X un insieme numerico totalmente ordinato (si pensi a $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$), Diciamo che un elemento $b \in X$ e' l'estremo superiore di un sottinsieme $A \subset X$ non vuoto e scriviamo $b = \sup A$ se e solo se soddisfa le seguenti condizioni*

$b \geq a$ per ogni $a \in A$

per ogni $\alpha > 0$, esiste qualche elemento $\bar{a} \in A$ tale che $b - \alpha < \bar{a}$.

In modo analogo si definisce la nozione di estremo inferiore.

La prima condizione significa che b e' un maggiorante di A; la seconda condizione significa che non appena b viene strettamente diminuito, perde la proprieta' di essere un maggiorante di A.

10. **Successioni crescenti**

Definizione 6 *Diciamo che una successione* (a_n) *e' crescente se*

$$\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}, \qquad n_1 < n_2 \Rightarrow a_{n_1} \le a_{n_2},$$

equivalentemente, se

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_n \le a_{n+1};$$

diciamo che (a_n) *e' strettamente crescente se queste condizioni valgono col* $\le$ *sostituito dal* $<$ *. Analogamente si definiscono le successioni decrescenti e strettamente decrescenti.*

Qualche esempio.

- La successione $a_n = n/(n+1)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, e' strettamente crescente. Infattti
  $$n/(n+1) < (n+1)/(n+2) \Leftrightarrow n(n+2) < (n+1)^2 \Leftrightarrow 0 < 1;$$
  cioe' $a_n < a_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
- La successione $(-1)^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, non e' crescente e non e' decrescente.

Teorema 1 *Sia* (a_n) *una successione reale crescente;*

se (a_n) *e' limitata, allora ha limite, e*

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n;$$

se (a_n) *e' illimitata, allora*

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty.$$

Vale un analogo risultato per le successioni decrescenti.

Dimostrazione Sia $\{a_n\}$ una successione crescente e limitata. Sia $l = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$; chiaramente $a_n \le l$, per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Dato $\varepsilon > 0$, si ha che c'e' un $N \in \mathbb{N}$ tale che $1 - \varepsilon < a_N$; per l'ipotesi (a_n) crescente si ha $a_N \le a_n$ per ogni $n \ge N$; per la transitivita' della relazione d'ordine si ha $l - \varepsilon < a_n$ per ogni $n > N$. Infine si ha

$$l - \varepsilon < a_n \le l, \qquad \forall n > N.$$

Il caso di una successione crescente illimitata e' analogo. $\square$