Lezioni del 8 ottobre e 10 ottobre.

1. Per proseguire in modo piu' spedito, introduciamo una definizione di limite verbalmente diversa ma logicamente equivalente alla definizione di limite data in precedenza.

   Definizione 1 *Diciamo che " la successione (a_n) tende al numero reale l " e scriviamo " $a_n \to l$ ", o che " il limite di (a_n) e' l " e scriviamo " $\lim a_n = l$ " se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ si ha che la disequazione $|a_n - l| < \varepsilon$ e' soddisfatta per ogni n maggiore o uguale ad un opportuno N.*

   Piu' in breve, scriviamo la condizione di sopra come segue: per ogni $\varepsilon > 0$, la disequazione $|a_n - l| < \varepsilon$ e' soddisfatta definitivamente. Ancora piu' in breve:

   per ogni $\varepsilon > 0$ si ha che

   $$|a_n - l| < \varepsilon \quad (definitivamente).$$

   Definizione 2 *Diciamo che " la successione (a_n) tende a piu' infinito " e scriviamo " $a_n \to +\infty$ ", o che " il limite di (a_n) e' piu' infinito " e scriviamo " $\lim a_n = +\infty$ " se e solo se per ogni $H \in \mathbb{R}$ si ha che $a_n > H$ per ogni n maggiore o uguale ad un opportuno N.*

   Piu' in breve, scriviamo la condizione di sopra come:

   per ogni $H \in \mathbb{R}$ si ha che

   $$a_n > H \quad (definitivamente).$$

   Analogamente per la definizione di limite $-\infty$.

   Diciamo che una successione e' "convergente" se ha limite finito, "divergente" se ha limite $+\infty$ o $-\infty$, e "regolare" se ha limite (finito o infinito).

2. **Limiti e operazioni aritmetiche. Somma.**

   L'operazione di limite si comporta bene rispetto all'operazione di somma, nel caso di successioni convergenti.

   Proposizione 1 *Siano (a_n) e (b_n) due successioni reali convergenti, (a_n) abbia limite $\alpha \in \mathbb{R}$ e (b_n) abbia limite $\beta \in \mathbb{R}$. Allora anche la successione somma $(a_n + b_n)$ e' convergente, ed ha limite $\alpha + \beta$. In simboli:*

   $$\left.\begin{array}{l} \lim a_n = \alpha \\ \lim b_n = \beta \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \lim(a_n + b_n) = \alpha + \beta.$$

In altri termini, si ha

$$\left.\begin{array}{l} a_n \to \alpha \\ b_n \to \beta \end{array}\right\} \quad \Rightarrow a_n + b_n \to \alpha + \beta,$$

o ancora:

$$\lim(a_n + b_n) = \lim(a_n) + \lim(b_n)$$

sotto la condizione che $\lim(a_n)$, $\lim(b_n)$ esistano e siano $\in \mathbb{R}$.

Lo stesso risultato vale per l'operazione di differenza.

Esempio:

$$\left.\begin{array}{cl} 1 & \to 1 \\ \frac{1}{n+1} & \to 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1 - 0 = 1.$$

3. La proposizione del punto precdente puo' essere dimostrata come segue.

   Osserviamo che

   $$|a_n + b_n - (\alpha + \beta)| = |a_n - \alpha + b_n - \beta)| \leq |a_n - \alpha| + |b_n - \beta)|\,,$$

   per la disuguaglianza triangolare.

   Dato $\varepsilon > 0$, si ha che

   $$\begin{array}{ll} |a_n - \alpha| < \dfrac{\varepsilon}{2} & (definitivamente) \\ |b_n - \beta| < \dfrac{\varepsilon}{2} & (definitivamente) \end{array}$$

   Dunque

   $$|a_n + b_n - (\alpha + \beta)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad (definitivamente).$$

4. L'operazione di limite si comporta bene rispetto all'operazione di somma, anche nel caso di una successione convergente ed una divergente.

   Proposizione 2 *Siano (a_n) e (b_n) due successioni reali regolari, (a_n) abbia limite $\alpha \in \mathbb{R}$ e (b_n) abbia limite $+\infty$. Allora anche la successione somma $(a_n + b_n)$ e' regolare, ed ha limite $+\infty$. In simboli:*

   $$\left.\begin{array}{l} \lim a_n = \alpha \\ \lim b_n = +\infty \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \lim(a_n + b_n) = +\infty.$$

   Si ha anche un'altra proposizione, sostituendo il simbolo $+\infty$ col simbolo $-\infty$.

Il comportamento dell'operazione di limite rispetto all'operazione di somma nel caso di successioni regolari puo' essere riassunto nella tabella

$\lim a_n$	$\lim b_n$	$\lim(a_n + b_n)$
α	β	$\alpha + \beta$
α	$+\infty$	$+\infty$
α	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	?

Nell'ultima riga si e' messo un punto di domanda in quanto per due successioni divergenti, una a $+\infty$ ed una $-\infty$, la successione somma puo' essere divergente a $+\infty$, divergente a $-\infty$, convergente, oppure non regolare, come mostrato dagli esempi seguenti

a_n	b_n	$a_n + b_n$
$2n$	$-n$	n
n	$-2n$	$-n$
n	$-n$	0
$n + (-1)^n$	$-n$	$(-1)^n$

Si dice che per due successioni divergenti, una a $+\infty$ ed una $-\infty$, il comportamento della successione somma e' una forma di indecisione.

5. La considerazione delle successioni regolari suggerisce di aggiungere all'insieme dei numeri reali i simboli $+\infty$ e $-\infty$.

   L'insieme ottenuto e' detto " insieme dei numeri reali " estesi ed e' indicato con $\mathbb{R}^*$, dunque

   $$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

   L'insieme $\mathbb{R}$ si puo' pensare come l'insieme dei punti di una retta r; l'insieme $\mathbb{R}^*$ si puo' pensare come l'insieme dei punti di una semicirconferenza C, compresi gli estremi, tale che C sia tangente ad r e la retta per gli estremi di C sia parallela ad r; l'immersione dell'insieme $\mathbb{R}$ nell'insieme $\mathbb{R}^*$ si puo' pensare come la corrispondenza che a ciascun punto P di r associa il punto P' di C tale che P e P' siano allineati col centro di C; i simboli $+\infty$ e $-\infty$ si possono pensare come gli estremi di C. Ciascuna successione di numeri reali divergente a $+\infty$ si puo' pensare come una successione di punti della retta r che si allontana indefinitamente in verso di r; l'immersione di r in C a crea allora una successione di punti di C che si avvicina indefintamente ad un estremo di C.

6. La considerazione della realzione fra i limiti di due successioni regolari e l'eventuale limite della successione loro somma suggerisce la seguente defінzione

di somma nell'insieme $\mathbb{R}^*$ dei numeri reali estesi.

$+$	$-\infty$	β	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	?
α	$-\infty$	$\alpha+\beta$	$+\infty$
$+\infty$	?	$+\infty$	$+\infty$

Si tratta di un'operazione parziale; le somme che corrispondono alle forme di indecisione, cioe' $+\infty + (-\infty)$ e $-\infty + (+\infty)$ non sono definite.

Possiamo allora riassumere quanto sopra detto riguardo al comportamento dell'operazione di limite rispetto all'operazione di somma come segue.

Proposizione 3 *Siano (a_n) e (b_n) successioni regolari. Se la somma $\lim a_n + \lim b_n$ e' definita in $\mathbb{R}^*$, allora anche $(a_n + b_n)$ e' regolare, e*

$$\lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n.$$

7. **Limiti e operazioni aritmetiche. Prodotto.**

   L'operazione di limite si comporta bene rispetto all'operazione di prodotto, nel caso di successioni convergenti.

   Proposizione 4 *Siano (a_n) e (b_n) due successioni reali convergenti, (a_n) abbia limite $\alpha \in \mathbb{R}$ e (b_n) abbia limite $\beta \in \mathbb{R}$. Allora anche la successione prodotto $(a_n b_n)$ e' convergente, ed ha limite $\alpha\beta$. In simboli:*

$$\left.\begin{array}{l} \lim a_n = \alpha \\ \lim b_n = \beta \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \lim(a_n b_n) = \alpha\beta.$$

   In altri termini, si ha

$$\left.\begin{array}{l} a_n \to \alpha \\ b_n \to \beta \end{array}\right\} \quad \Rightarrow a_n b_n \to \alpha\beta,$$

   o ancora:

$$\lim(a_n b_n) = \lim(a_n)\lim(b_n)$$

   sotto la condizione che $\lim(a_n)$, $\lim(b_n)$ esistano e siano $\in \mathbb{R}$.

8. La proposizione del punto precdente puo' essere dimostrata a partire dalla seguente osservazione.

$$\begin{aligned} |a_n b_n - \alpha\beta| &= |a_n b_n - a_n\beta + a_n\beta - \alpha\beta| \\ &\leq |a_n b_n - a_n\beta| + |a_n\beta - \alpha\beta| \\ &= |a_n|\,|b_n - \beta| + |a_n - \alpha|\,|\beta| \end{aligned}$$

9. L'operazione di limite si comporta bene rispetto all'operazione di prodotto, anche nel caso di una successione convergente a un numero diverso da zero ed una divergente.

Proposizione 5 *Siano (a_n) e (b_n) due successioni reali regolari, (a_n) abbia limite $\alpha \in \mathbb{R}$ con $\alpha > 0$, e (b_n) abbia limite $+\infty$. Allora anche la successione prodotto $(a_n b_n)$ e' regolare, ed ha limite $+\infty$. In simboli:*

$$\left.\begin{array}{l} \lim a_n = \alpha > 0 \\ \lim b_n = +\infty \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \lim(a_n b_n) = +\infty.$$

Si hanno quattro proposizioni simili a questa; riassunte dalla seguente.

Proposizione 6 *Siano (a_n) e (b_n) due successioni reali regolari, $\lim a_n = \alpha \neq 0$, e $\lim b_n = \infty$, con un dato segno che non indichiamo. Allora anche la successione prodotto $(a_n b_n)$ e' regolare, e $\lim(a_n b_n) = \infty$, col segno dato dall'usuale regola.*

Il comportamento dell'operazione di limite rispetto all'operazione di prodotto nel caso di successioni regolari puo' essere riassunto nella tabella

$\lim a_n$	$\lim b_n$	$\lim(a_n b_n)$
0	0	0
0	β	0
0	∞	?
α	β	$\alpha\beta$
α	∞	∞
∞	∞	∞

I segni non sono scritti; il segno del prodotto e' dato dall'usuale regola.

Nella terza riga si e' messo un punto di domanda in quanto per una successione convergente a 0 ed una divergente a ∞, la successione prodotto puo' essere convergente a 0, convergente a un numero $\neq 0$, divergente a ∞, oppure non regolare, come mostrato dagli esempi seguenti

a_n	b_n	$a_n b_n$
$1/n^2$	n	$1/n$
$1/n$	n	1
$1/n$	n^2	n
$(-1)^n/n$	n	$(-1)^n$

Si dice che per una successione convergente a 0 ed una divergente a ∞, il comportamento della successione prodotto e' una forma di indecisione.

10. La considerazione della realzione fra i limiti di due successioni regolari e l'eventuale limite della successione loro prodotto suggerisce la seguente definzione di prodotto nell'insieme $\mathbb{R}^*$ dei numeri reali estesi.

$$\begin{array}{c|ccc} \cdot & 0 & \beta & \infty \\ \hline 0 & 0 & 0 & ? \\ \alpha & 0 & \alpha\beta & \infty \\ \infty & ? & \infty & \infty \end{array}$$

I segni non sono scritti; il segno del prodotto e' dato dall'usuale regola.

Si tratta di un'operazione parziale; i prodotti che corrispondono alle forme di indecisione, in sostanza

$0 \cdot \infty$

non sono definiti.

Possiamo riassumere quanto sopra detto riguardo al comportamento dell'operazione di limite rispetto all'operazione di prodotto come segue.

Proposizione 7 *Siano* (a_n) *e* (b_n) *successioni regolari. Se il prodotto* $(\lim a_n)(\lim b_n)$ *e' definito in* $\mathbb{R}^*$*, allora anche* (a_nb_n) *e' regolare, e*

$$\lim(a_nb_n) = (\lim a_n)(\lim b_n).$$

11. **Convergenza dal di sotto, dal di sopra**

Diciamo che la successione (a_n) tende al numero reale l dal di sotto e scriviamo $a_n \to l^-$, o che il limite di (a_n) e' l^- e scriviamo $\lim a_n = l^-$, se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ si ha che

$$a_n \in]l-\varepsilon, l] \quad (definitivamente).$$

Diciamo che la successione (a_n) tende al numero reale l dal di sopra e scriviamo $a_n \to l^+$, o che il limite di (a_n) e' l^+ e scriviamo $\lim a_n = l^+$, se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ si ha che

$$a_n \in [l, l+\varepsilon[\quad (definitivamente).$$

Alcuni esempi:

$$\frac{1}{n} \to 0^+; \quad -\frac{1}{n} \to 0^-; \quad \frac{(-1)^n}{n} \to 0, \quad \frac{(-1)^n}{n} \not\to 0^-, \quad \frac{(-1)^n}{n} \not\to 0^+.$$

12. **Limiti e operazioni aritmetiche. Inversione, divisione.**

Per ciascuna successione (c_n) con $c_n \neq 0$ definitivamente, consideriamo la successione $\left(\frac{1}{c_n}\right)$ degli inversi. Il comportamento dell'operazione di limite rispetto all'operazione di inversione nel caso di successioni regolari puo' essere riassunto nella tabella

$\lim c_n$	0^-	0^+	α	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\left(\frac{1}{c_n}\right)$	$-\infty$	$+\infty$	$\frac{1}{\alpha}$	0^-	0^+

.

Per una successione convergente a 0, ma non a 0^- o a 0^+ la successione degli inversi puo' non essere regolare; ad esempio, la successione $(-1)^n/n$ converge a 0, la successione degli inversi e' $(-1)^n n$, che non e' regolare. In realta' si prova che per ogni successione convergente a 0, ma non a 0^- o a 0^+ la successione degli inversi non e' mai regolare.

13. Per ciascuna successione (a_n) ed per ciascuna successione (b_n) con $b_n \neq 0$ definitivamente, consideriamo la successione $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ delle divisioni.

    Il comportamento dell'operazione di limite rispetto all'operazione di divisione nel caso di successioni regolari puo' essere riassunto nella tabella

$\lim a_n$	$\lim b_n$	$\lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$
0	0	?
0	β	0
0	∞	0
α	0	∞
α	β	$\frac{\alpha}{\beta}$
α	∞	0
∞	0	∞
∞	β	∞
∞	∞	?

    Ogni 0 si intende che sia uno 0^- o uno 0^+; ogni ∞ si intende che sia un $-\infty$ o un $+\infty$; il segno della divisione e' dato dall'usuale regola.

    Nella prima e ultima riga si e' messo un punto di domanda in quanto in tali casi la successione divisione puo' essere convergente a 0, convergente a un numero $\neq 0$, divergente a ∞, oppure non regolare (si costruiscano degli esempi). Si dice che per due successioni convergenti a 0 e per due successioni divergenti il comportamento della successione divisione e' una forma di indecisione.

14. La considerazione della relazione fra i limiti di due successioni regolari e l'eventuale limite della successione loro divisione suggerisce la seguente definzione di divisione nell'insieme $\mathbb{R}^*$ dei numeri reali estesi.

	0	β	∞
0	?	0	0
α	∞	$\frac{\alpha}{\beta}$	0
∞	∞	∞	?

I segni non sono scritti; il segno del prodotto e' dato dall'usuale regola.

Si tratta di un'operazione parziale; le divisioni che corrispondono alle forme di indecisione, cioe'

$\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$

non sono definite.

Possiamo riassumere quanto sopra detto riguardo al comportamento dell'operazione di limite rispetto all'operazione di prodotto come segue.

Proposizione 8 *Siano* (a_n) *e* (b_n) *successioni regolari, con* b_n *definitivamente* $\neq 0$. *Se la divisione* $\frac{\lim a_n}{\lim b_n}$ *e' definita in* $\mathbb{R}^*$, *allora anche la successione* $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ *e' regolare, e*

$$\lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}.$$

15. **Esempi**

Consideriamo la successione

$n^2 - n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$

Si ha

$\lim\left(n^2 - n\right) = \lim\left(n^2\right) - \lim n = +\infty - \infty,$

una forma di indecisione.

Mettiamo in evidenza l'addendo di grado massimo

$n^2 - n = n^2\left(1 - \frac{1}{n}\right).$

Si ha

$\lim\left(n^2\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right)) = \lim\left(n^2\right) \cdot \lim\left(1 - \frac{1}{n}\right) = +\infty \cdot 1 = +\infty.$

Consideriamo una successione della forma

$$r_n = \frac{an^2 + bn + c}{dn + e}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

dove $a, d \neq 0$. Si ha

$$\lim r_n = \lim \frac{an^2 + bn + c}{dn + e} = \frac{\lim\left(an^2 + bn + c\right)}{\lim\left(dn + e\right)} = \frac{\infty}{\infty},$$

una forma di indecisione.

Mettiamo in evidenza gli addendi di grado massimo

$$\frac{an^2 + bn + c}{dn + e} = \frac{n^2\left(a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2}\right)}{n\left(d + \frac{e}{n}\right)} = \frac{n\left(a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2}\right)}{\left(d + \frac{e}{n}\right)}.$$

Si ha

$$\lim r_n = \lim \frac{n\left(a+\frac{b}{n}+\frac{c}{n^2}\right)}{\left(d+\frac{e}{n}\right)} = \frac{+\infty\cdot a}{d} = \infty,$$

dove il segno di ∞ e' quello di a/d.

Consideriamo una successione r_n, $n = 0,1,2,\ldots$ dove r_n e' la frazione di un polinomio di grado p su un polinomio di grado q :

$$r_n = \frac{an^p + bn^{p-1} + \cdots}{cn^q + dn^{q-1} + \cdots}, \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

dove $a, c \neq 0$. Mettiamo in evidenza gli addendi di grado massimo

$$r_n = \frac{n^p\left(a+\frac{b}{n}+\cdots\right)}{n^q\left(c+\frac{d}{n}+\cdots\right)} = n^{p-q}\frac{a+\frac{b}{n}+\cdots}{c+\frac{d}{n}+\cdots}.$$

Si ha

$$\lim r_n = \lim\left(n^{p-q}\frac{a+\frac{b}{n}+\cdots}{c+\frac{d}{n}+\cdots}\right) = \begin{cases} \infty & p>q \\ \frac{a}{c} & p=q \\ 0 & p<q \end{cases}$$

il segno di ∞ e di 0 e' quello di a/c.

Consideriamo la successione

$$q_n = \frac{11\cdot 2^n + 12\cdot 5^n}{13\cdot 3^n + 14\cdot 7^n}, \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

Si ha

$$\lim q_n = \lim \frac{11\cdot 2^n + 12\cdot 5^n}{13\cdot 3^n + 14\cdot 7^n} = \frac{\lim\left(11\cdot 2^n + 12\cdot 5^n\right)}{\lim\left(13\cdot 3^n + 14\cdot 7^n\right)} = \frac{\infty}{\infty},$$

una forma di indecisione.
Mettiamo in evidenza gli addendi di piu' pesanti

$$\frac{11\cdot 2^n + 12\cdot 5^n}{13\cdot 3^n + 14\cdot 7^n} = \frac{5^n\left(12+11(\frac{2}{5})^n\right)}{7^n\left(14+13(\frac{3}{7})^n\right)} = \left(\frac{5}{7}\right)^n \frac{12+11(\frac{2}{5})^n}{14+13(\frac{3}{7})^n}.$$

Si ha

$$\lim q_n = \lim\left(\left(\frac{5}{7}\right)^n \frac{12+11(\frac{2}{5})^n}{14+13(\frac{3}{7})^n}\right) = 0\cdot\frac{12}{14} = 0$$

16. **Confronto fra successioni divergenti**

Siano (a_n) e (b_n) successioni divergenti. Diciamo che

$$a_n\ diverge \left\{ \begin{array}{c} piu'\ velocemente\ di \\ come \\ piu'\ lentamente\ di \end{array} \right\} b_n\ sse\ \lim \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = \left\{ \begin{array}{l} \infty \\ un\ \alpha \neq 0 \\ 0 \end{array} \right.$$

Teorema 1 *Fra le successioni divergenti, ciascunua successione esponenziale diverge piu' velocemente di ciascuna successione potenza, e ciascunua successione potenza diverge piu' velocemente di ciascuna successione logaritmo:*

$$\frac{b^n}{n^\alpha} \to +\infty; \qquad \frac{n^\alpha}{\log_b(n)} \to +\infty \qquad (\alpha > 0,\ b > 1)$$

Questo teorema si puo' dimostrare usando lo sviluppo del binomio di Newton.

17. **Limiti e operazioni aritmetiche. Potenze**

Dato un numero reale positivo $b > 0$ ed una successione (c_n), consideriamo la successione delle potenze (b^{c_n}).

Il comportamento dell'operazione di limite rispetto all'operazione di esponenziale nel caso di successioni regolari puo' essere riassunto nelle tabelle seguenti

$$\begin{array}{c|ccc} \lim c_n & -\infty & \alpha & +\infty \\ \hline \lim (b^{c_n}) & 0^+ & b^\alpha & +\infty \end{array}. \qquad (b > 1)$$

$$\begin{array}{c|ccc} \lim c_n & -\infty & \alpha & +\infty \\ \hline \lim (b^{c_n}) & +\infty & b^\alpha & 0^+ \end{array}. \qquad (0 < b < 1).$$

Piu' in generale, si puo' considerare l'operazione di elevamento di una successione a potenza con esponente un'altra successione. Ma in realta' cio' non e' necessario, in quanto ci si puo' sempre ricondurre al caso di elevamento di una costante a potenza una successione.

Un esempio. Consideriamo la successione

$$\left(\sqrt[n]{n} \right)_1^{+\infty} = \left(1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, \dots \right).$$

Si ha che

$$\sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}} = \left(e^{\log(n)} \right)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\log(n)}{n}} \to e^0 = 1.$$

18. **Limiti e ordinamento**

L'operazione di limite si comporta bene, senza eccezioni, rispetto all'ordinamento parziale delle successioni indotto dall'ordinamento totale dei numeri reali. Precisamente:

date due successioni convergenti (a_n) e (b_n) se $a_n \leq b_n$ definitivamente, allora

$$\lim(a_n) \leq \lim(b_n).$$

In particolare, prendendo come (a_n) la successione costante uguale a 0, si ha

se una successione convergente (b_n) ha termini definitivamente maggiori-uguali a 0, allora

$$\lim(b_n) \geq 0.$$

Si noti che se una successione convergente ha termini definitivamente positivi, il suo limite non e0' necessarioamnete positivo: basti pensare alla successione $\frac{1}{n}$.

L'ordinamento totale dell'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali si estende in modo naturale ad un ordinamento totale dell'insieme $\mathbb{R}^*$ dei numeri reali estesi ponendo

$$-\infty < \alpha < +\infty, \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

L'operazione di limite si comporta bene rispetto all'ordinamento per quanto riguarda tutte le successioni regolari:

Proposizione 9 *Date due successioni regolari (a_n) e (b_n) se $a_n \leq b_n$ definitivamente, allora*

$$\lim(a_n) \leq \lim(b_n).$$