Lezione del 10 ottobre. Serie.

1. **Serie di una successione di numeri reali.**

   L'operazione di somma di un numero finito di termini reali si puo' estendere ad una operazione parziale su una successione infinta di termini, che quando e' definita fornisce come risultato un numero reale esteso; questa operazione, e il risultato dell'operazione, si dice serie della successione.

   L'operazione di serie e' un'operazione parziale che in entrata prende una successione di numeri reali e in unscita porge un numero reale esteso, definita come segue. La "serie" di una successione

   $$(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$$

   di numeri reali $a_n \in \mathbb{R}$, e' definita come il limite in $\mathbb{R}^*$ (quando esiste) della successione

   $$(s_0, s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots)$$

   delle "somme parziali"

   $$\begin{aligned} s_0 &= a_0 \\ s_1 &= a_0 + a_1 \\ s_2 &= a_0 + a_1 + a_2 \\ &\vdots \\ s_n &= a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \\ &\vdots; \end{aligned}$$

   se questo limite e' $s \in \mathbb{R}^*$, si scrive

   $$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} a_i = s;$$

   nel caso in cui $s \in \mathbb{R}$ si dice che "la serie della successione a_n converge ad s," nel caso in cui $s = \pm\infty$ si dice che "la serie della successione a_n diverge a $\pm\infty$."

2. **Serie geometrica**

   Dato $q \in \mathbb{R}$, consideriamo la successione geometrica di ragione q, cioe' la successione delle potenze di q ad esponente naturale

   $$\left(1, q, q^2, \ldots, q^n, \ldots\right).$$

Consideriamo inizialmente il caso $|q| < 1$. Le somme parziali di questa successione sono

$$\begin{aligned}
s_0 &= 1 \\
s_1 &= 1 + q \\
s_2 &= 1 + q + q^2 \\
&\vdots \\
s_n &= 1 + q + q^2 + \cdots + q^n \\
&\vdots
\end{aligned}$$

per ogni n si ha

$$s_n \cdot (1-q) = (1 + q + \cdots + q^n)(1-q) = 1 - q^{n+1}$$

da cui, essendo $q \neq 1$, si ricava

$$s_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Essendo $|q| < 1$, la successione delle somme parziali ha limite

$$\lim(s_n) = \lim\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right) = \frac{1}{1-q}.$$

Abbiamo dunque che la serie della successione geometrica di ragione q, in breve la "serie geometrica di ragione q", per $|q| < 1$ converge e si ha

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

In generale, per la serie geometrica si ha

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \begin{cases} \textit{non esiste} & \textit{per } q \leq -1 \\ 1/(1-q) & \textit{per } |q| < 1 \\ +\infty & \textit{per } q \geq 1 \end{cases}$$

Ad esempio, per $q = \frac{1}{2}$ si ha

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

3. Ciascun numero decimale positivo

$$c_m \cdots c_1 c_0, d_1 d_2 \cdots d_n \cdots \qquad (c_i, d_j \in \{0, 1, \ldots, 9\})$$

e′ per definizione una serie

$$c_m 10^m + \cdots + c_1 10 + c_0 1 + d_1 10^{-1} + d_2 10^{-2} + \cdots + d_n 10^{-n} + \cdots$$

Abbiamo visto che data una frazione m/n (per semplicita′ m, n interi positivi rappresentati in base 10), applicando l′algoritmo della divisione indefinitamente si ottiene un numero rappresentato in base 10 da un allineamento limitato o illimitato periodico. Ad esempio, abbiamo visto che

$$\frac{5}{6} = 5 : 6 = 0,8333\ldots$$

Usando la formula per la somma della serie geometrica possiamo viceversa trasformare numeri decimali periodici in frazioni. Ad esempio

$$\begin{aligned} 0,8333\ldots &= 8 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2} + 3 \cdot 10^{-3} + 3 \cdot 10^{-4} + \cdots \\ &= 8 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2} \left(1 + 10^{-1} + 10^{-2} + \cdots\right) \\ &= 8 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2} \frac{1}{1 - 10^{-1}} = \ldots = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

Lungo queste linee si ricavano le formule note per trasformare qualsiasi numero decimale periodico in frazione.