**Recupero. 1, spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^n$, ortogonalita', norma.**

1. **Ortogonalita'**

   L'espressione della relazione di ortogonalita' fra due vettori nel piano e nello spazio nei termini delle loro coordinate rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico suggerisce la seguente

   **Definizione 1** *Siano $a = (a_i)_1^n$ e $b = (b_i)_1^n$ due vettori in $\mathbb{R}^n$. Si dice che $a$ e' ortogonale $a$ $b$, r si scrive $a \perp b$, se e solo se*

   $$\sum_1^n a_i b_i = 0, \quad \textit{in sintesi} \quad a'b = 0.$$

   Osservazione. I vettori canonici $e_1, e_2, \ldots, e_n$ di $\mathbb{R}^n$ sono a due a due ortogonali:

   $$e_p \perp e_q, \;\; \textit{per ogni } p, q = 1, 2, \ldots, n, \;\; \textit{con } p \neq q.$$

   Le proprieta' salienti della relazione di ortogonalita' continuano a valere.

   1- Per ogni $a \in \mathbb{R}^n$ si ha

   $$a \perp a \quad \textit{se e solo se} \quad a = 0 \in \mathbb{R}^n;$$

   infatti, $a \perp a$ significa $a'a = 0$, e cio' per le proprieta' del prodotto interno equivale a $a = 0 \in \mathbb{R}^n$.

   2- Per ogni $a, b \in \mathbb{R}^n$, si ha

   $$a \perp b \;\; \textit{se e solo se} \;\; b \perp a.$$

   Infatti, $a \perp b$ significa $a'b = 0$; essendo $a'b = b'a$, cio' equivale a $b'a = 0$; cio' significa $b \perp a$. Dunque la relazione di ortogonalita' e' simmetrica, e potremo indifferentemente dire che un vettore e' ortogonale ad un altro vettore oppure che i due vettori sono fra loro ortogonali.

   3- Per ogni $a, b, c \in \mathbb{R}^n$, si ha

   $$\textit{se} \;\; a \perp b \;\; \textit{e} \;\; a \perp c, \;\; \textit{allora} \;\; a \perp (rb + sc), \quad \forall r, s \in \mathbb{R}.$$

   Infatti: le condizioni $a \perp b$ e $a \perp c$ significano che $a'b = 0$ e $a'c = 0$; da cio' segue che $a'(rb + sc) = r(a'b) + s(a'c) = r0 + s0 = 0$; cio' che significa che $a \perp (rb + sc)$.

2. Complemento ortogonale.

   Nel piano si ha che: dato un vettore non nullo $a$ applicato in un punto O, i vettori applicati in O ortogonali ad $a$ sono tutti e soli quelli che stanno su una retta per O, quella perpendicolare alla retta generata da $a$. Nello spazio si ha che: dato un vettore non nullo $a$ applicato in un punto O, i vettori applicati in O ortogonali ad $a$ sono tutti e soli quelli che stanno su un piano per O, quello perpendicolare alla retta generata da $a$; dati due vettori non allineati $a, b$ applicati in O, i vettori applicati in O ortogonali ad $a, b$ sono tutti e soli quelli che stanno su una retta per O, quella perpendicolare al piano generato da $a, b$; Queste costruzioni e questi fatti si estendono come segue.

**Definizione 2** *Sia $S$ un sottinsieme di $\mathbb{R}^n$. L'insieme dei vettori di $\mathbb{R}^n$ che sono ortogonali ad ogni vettore di $S$ si dice complemento ortogonale di $S$ e si indica con $S^\perp$. In simboli:*

$$\begin{aligned} S^\perp &= \{x \in \mathbb{R}^n : \;\; s \perp x, \; \forall s \in S\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n : \;\; s'x = 0, \; \forall s \in S\}. \end{aligned}$$

Esempio. In $\mathbb{R}^3$ consideriamo i vettori $a = (1, 2, 3)$ e $b = (4, 5, 6)$. Si ha

$$\begin{aligned} \{a\}^\perp &= \{x \in \mathbb{R}^3 : \;\; a'x = 0\} \\ &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \;\; x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0\} \\ \{a, b\}^\perp &= \{x \in \mathbb{R}^3 : \;\; a'x = 0, \; b'x = 0\} \\ &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \;\; x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \; 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0\} \end{aligned}$$

Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^n$ consideriamo un vettore $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$; il complemento ortogonale $\{a\}^\perp$ dell'insieme $\{a\}$ costituito solo da $a$ e' l'insieme dei vettori $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tali che

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0.$$

In altri termini: il complemento ortogonale di un vettore $a$ in $\mathbb{R}^n$ e' l'insieme delle soluzioni dell'equazione lineare omogenea in $n$ incognite avente come vettore dei coefficienti $a$. Vale anche il viceversa: l'insieme delle soluzioni di una equazione lineare omogenea in $n$ incognite e' il complemento ortogonale del suo vettore dei coefficienti.

Analoghe considerazioni si possono svolgere per il complemento ortogonale $\{a, b, \ldots, d\}^\perp$ di un insieme di vettori $a, b, \ldots, d$ di $\mathbb{R}^n$.

**Proposizione 1** *Il complemento ortogonale $S^\perp$ di un qualsiasi sottinsieme $S$ di $\mathbb{R}^n$ e' un sottospazio di $\mathbb{R}^n$.*

Dimostrazione. $S^\perp$ non e' vuoto, in quanto contiene il vettore nullo $0 \in \mathbb{R}^n$.

Se $u, v \in S^\perp$, allora $u + v \in S^\perp$; infatti: comunque sia dato $s \in S$, da $u \perp s$ e $v \perp s$ per le proprieta' dell'ortogonalita' segue $(u + v) \perp s$.

Se $u \in S^\perp$ ed $r \in \mathbb{R}$ allora $ru \in S^\perp$; infatti: comunque sia dato $s \in S$, da $u \perp s$ per le proprieta' dell'ortogonalita' segue $(ru) \perp s$.

3. Proiezione ortogonale.

   La definizione data nel piano di proiezione ortogonale di un vettore applicato in un punto O su una retta per O, la definizione data nello spazio di proiezione ortogonale di un vettore applicato in un punto O su un piano per O, e le formule per tali proiezioni si estendono al caso generale.

   **Proposizione 2** *Sia L un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ con $\dim(L) = 1$. Allora ogni $b \in \mathbb{R}^n$ si puo' scrivere in uno ed un solo modo come*

   $$b = p + q, \quad con \;\; p \in L, \;\; q \in L^{\perp}.$$

   *Se a e' un qualsiasi vettore non nullo in L, allora $p = \frac{a'b}{a'a}a$.*

   Il vettore $p$ si dice proiezione ortogonale di $b$ su $L$ e si indica con $\mathrm{pr}_L(b)$. Lo scalare $(a'b)/(a'a)$, che da la coordinata di $p$ rispetto al vettore $a$ che e' base di $L$, si dice coefficiente di Fourier di $b$ rispetto ad $a$.

   Questa proposizione si puo' dimostrare ripetendo i passi seguiti per ricavare la formula per la proiezione ortogonale di un vettore su una retta nel piano. Di seguito diamo una dimostrazione alternativa.

   - Poniamo

   $$p = \frac{a'b}{a'a}a, \quad e \quad q = b - \frac{a'b}{a'a}a.$$

   Chiaramente si ha $p \in L$ e $b = p + q$. Inoltre $q \in L^{\perp}$, in quanto

   $$a'\left(b - \frac{a'b}{a'a}a\right) = a'b - \frac{a'b}{a'a}a'a = a'b - a'b = 0.$$

   -Unicita' della scrittura. Siano $b = p_1 + q_1$ e $b = p_2 + q_2$ due scritture di $b$, con $p_1, p_2 \in L$ e $q_1, q_2 \in L^{\perp}$. Dalle due scritture si deduce l'uguaglianza $p_2 - p_1 = q_1 - q_2$, che porge due scritture di un vettore che sta sia in $L$ che in $L^{\perp}$. Questo vettore deve essere ortogonale a se' stesso, e dunque deve essere il vettore nullo: $p_2 - p_1 = 0 = q_1 - q_2 = 0$ cioe' $p_1 = p_2$ e $q_1 = q_2$.

   Esempio.

   In $\mathbb{R}^n$ sia $L$ il sottospazio costituito dai vettori che hanno tutte le componenti uguali, e sia $a \in L$ il vettore $a = (1, 1, \ldots, 1)$. Allora il coefficiente di Fourier di $b$ risopetto ad $a$ e'

   $$\frac{a'b}{a'a} = \frac{\sum_1^n 1 \cdot b_i}{\sum_1^n 1 \cdot 1} = \frac{\sum_1^n b_i}{n} = \mu_b,$$

   cioe' la media delle componenti di $b$. La proiezione ortogonale di $b$ su $L$ e' data da

   $$\mathrm{pr}_L(b) = \mu_b \, (1, 1, \ldots, 1) = (\mu_b, \mu_b, \ldots, \mu_b),$$

   ed e' il vettore che ha tutte le componenti uguali alla media dei valori di $b$.

**Proposizione 3** *Sia L e' un sottospazio di* $\mathbb{R}^n$ *con* $\dim(L) = 1$*. Allora il sottospazio* $L^{\perp}$ *ha dimensione* $n-1$*.*

La dimostrazione segue direttamente dalla proposizione precedente. [1]

Le proposizioni e le definizioni precedenti si estendono al caso di sottospazi di dimensione qualsiasi.

**Proposizione 4** *Sia V un sottospazio di* $\mathbb{R}^n$*. Allora ogni* $b \in \mathbb{R}^n$ *si puo' scrivere in uno ed un solo modo come*

$$b = p + q, \quad con \;\; p \in V, \;\; q \in V^{\perp}.$$

*Se* $a_1, \ldots, a_m$ *e' una qualsiasi base di V, e A e' la matrice di tipo* $n \times m$ *avente colonne* $a_1, \ldots, a_m$*, allora* $p = A(A'A)^{-1}A'b$*.*

Il vettore $p$ si dice proiezione ortogonale di $b$ su $V$ e si indica con $\mathrm{pr}_V(b)$.

**Proposizione 5** *Sia V e' un sottospazio di* $\mathbb{R}^n$ *con* $\dim(V) = m$*. Allora il sottospazio* $V^{\perp}$ *ha dimensione* $n-m$*.*

---

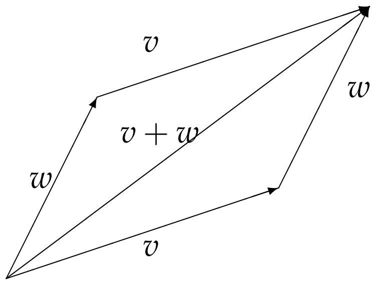
[1] Dimostrazione. Sia $a \in L$ con $a \neq 0 \in \mathbb{R}^n$, e sia $v_1, \ldots, v_m$ una base di $L^{\perp}$. Affermiamo che la sequenza $a, v_1, \ldots, v_m$ e' una base di $\mathbb{R}^n$.
- $a, v_1, \ldots, v_m$ e' un sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$; infatti, comunque sia dato un $b \in \mathbb{R}^n$ per la Proposizione precedente esistono un $p \in L$ ed un $q \in L^{\perp}$ tali che
$b = p + q;$
essendo $a$ una base di $L$ e $v_1, \ldots, v_m$ una base di $L^{\perp}$ si ha che esistono degli scalari $r, s_1, \ldots, s_m \in \mathbb{R}$ tali che
$p = ra, \quad q = s_1v_1 + \cdots + s_mv_m;$
sostituendo queste due uguaglianze nella precedente si ha
$b = ra + s_1v_1 + \cdots + s_mv_m,$
cioe' $b$ e' combinazione lineare di $a, v_1, \ldots, v_m$;
- la sequenza $a, v_1, \ldots, v_m$ e' linearmente indipendente; infatti l'uguaglianza
$ya + x_1v_1 + \cdots + x_mv_m = 0, \qquad (0 \in \mathbb{R}^n)$
negli scalari $y, x_1, \ldots, x_m$ porge una scrittura del vettore nullo come somma di un vettore $ya \in Ł$ e di un vettore $x_1v_1 + \cdots + x_mv_m \in L^{\perp}$; d'altro canto anche $0 = 0 + 0$ e' una scrittura del vettore nullo come somma di un vettore in $L$ e di un vettore in $L^{\perp}$; per l'unicita' della scrittura, si ha: $ya = 0$ e $x_1v_1 + \cdots + x_mv_m = 0$; essendo $a \neq 0$ e $v_1, \ldots, v_m$ linearmente indipendenti si ha infine $y = 0$ e $x_1 = \ldots = x_m = 0$.
-Abbiamo provato che $a, v_1, \ldots, v_m$ e' una base di $\mathbb{R}^n$. Poiche' ogni base di $\mathbb{R}^n$ e' formata da $n$ vettori, si ha $m = n-1$.

4. **Lunghezza di un vettore nel piano**

Consideriamo i vettori del piano applicati in un punto O. Scelto un segmento come unita', possiamo parlare di lunghezza di un vettore $v$ rispetto a tale segmento unita'; indichiamo tale lunghezza col simbolo $\|v\|$.

La lunghezza dei vettori e' legata alle operazioni sui vettori nel modo seguente:

- Consideriamo due vettori $v, w$ e il vettore $v + w$ loro somma.




Dal fatto che la lunghezza di un lato di un triangolo non supera la somma delle lunghezze degli altri due si ha la disuguaglianza

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|,$$

detta appunto *disuguaglianza triangolare*.

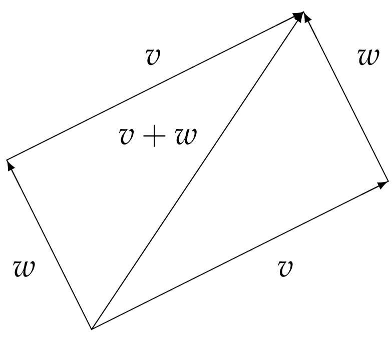
- Consideriamo un vettore $v$, uno scalre $r$ e il vettore $vr$ multiplo di $v$ secondo $r$. Allora:

$$\|rv\| = |r|\|v\|,$$

dove $|r|$ e' il valore assoluto di $r$.

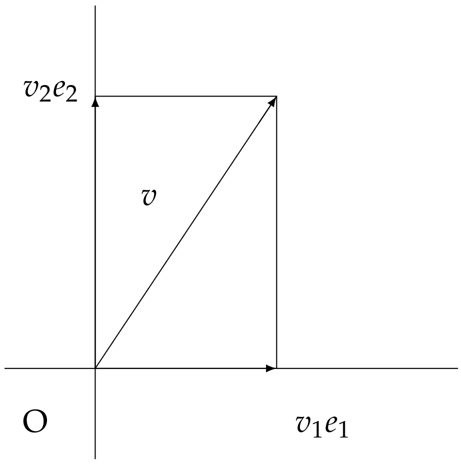
Il teorema di Pitagora puo' essere espresso nella forma seguente: se due vettori $v$ e $w$ sono fra loro ortogonali, allora il quadrato della lunghezza del vettore somma $v + w$ e' uguale alla somma dei quadrati delle lunghezze dei vettori addendi $v, w$ :

$$\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2.$$



5. Consideriamo un sistema di riferimento cartesiano ortogonale con origine in O nel quale i vettori canonici $e_1$ ed $e_2$ abbiano lunghezza 1, ed identifichiamo l'insieme dei vettori del piano applicati in O con $\mathbb{R}^2$.

   Se $v = [v_i]_1^2$, allora $v = v_1 e_1 + v_2 e_2$, e il vettore $v$ e' la diagonale del rettangolo avente per lati i vettori $v_1 e_1$ e $v_2 e_2$,




   cosi' dal teorema di Pitagora si ha

$$\begin{aligned} \|v\| &= \sqrt{\|v_1 e_1\|^2 + \|v_2 e_2\|^2} \\ &= \sqrt{|v_1|^2 + |v_2|^2} \\ &= \sqrt{v_1^2 + v_2^2}. \end{aligned}$$

6. **Lunghezza di un vettore nello spazio**

   Consideriamo i vettori dello spazio applicati in un punto O. Scelto un segmento come unita', possiamo parlare di lunghezza di un vettore $v$ rispetto a tale segmento unita'; indichiamo tale lunghezza col simbolo $\|v\|$.

   Consideriamo un sistema di riferimento cartesiano ortogonale con origine in O nel quale i vettori canonici $e_1, e_2$ ed $e_3$ abbiano lunghezza 1, ed identifichiamo l'insieme dei vettori dello spazio applicati in O con $\mathbb{R}^3$.

   Se $v = [v_i]_1^3$, allora $v = v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3$, e il vettore $v$ e' la diagonale del rettangolo avente per lati i vettori $v_1 e_1 + v_2 e_2$ e $v_3 e_3$, cosi' dal teorema di Pitagora si ha

$$\begin{aligned} \|v\| &= \sqrt{\|v_1 e_1 + v_2 e_2\|^2 + \|v_3 e_3\|^2} \\ &= \sqrt{\left(\sqrt{v_1^2 + v_2^2}\right)^2 + |v_3|^2} \\ &= \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}. \end{aligned}$$

7. **Norma di un vettore di $\mathbb{R}^n$.**

   **Definizione 3** *Si definisce la lunghezza di un vettore $v = [v_i]_{i=1}^n$ di $\mathbb{R}^n$ il numero reale $\|v\|$ dato da*
   $$\|v\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2} = \sqrt{v'v}.$$
   *Solitamente, al termine lunghezza si preferisce il termine norma.*

   Nel caso $n = 1$ si ha che la norma di un numero reale $r$ e' data da
   $$\|r\| = \sqrt{r^2} = |r|,$$
   il valore assoluto di $r$.

   Si osservi che per i vettori $e_1, e_2, \ldots, e_n$ della base canonica di $\mathbb{R}^n$ si ha
   $$\|e_1\| = \|e_2\| = \ldots = \|e_n\| = 1.$$
   Un vettore che come questi ha norma 1 si dice *versore*.

8. Le principali proprieta' della norma dei vettori in $\mathbb{R}^n$ sono:

   - la norma di un vettore e' sempre maggiore-uguale a zero e vale zero se e solo se il vettore e' nullo:
     $\|v\| \geq 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$;
     $\|v\| = 0$ *se e solo se* $v = 0_n$.
   - La norma del vettore prodotto di un vettore per uno scalare e' uguale al prodotto della norma del vettore per il valore assoluto dello scalare:
     $$\|rv\| = |r|\|v\|, \qquad r \in \mathbb{R}.$$
   - La norma del vettore somma e' minore o uguale alla somma delle norme dei vettori addendi:
     $$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|.$$
     Questa disuguaglianza viene detta *disuguaglianza triangolare*, per il significato che assume nel piano e nello spazio.

   La prime due proprieta' si verificano facilmente. Ad esempio, la seconda si verifica cosi':
   $$\|rv\| = \sqrt{(rv)'(rv)} = \sqrt{r^2(v'v)} = |r|\sqrt{v'v} = |r|\|v\|.$$
   La terza proprieta' non si verifica cosi' facilmente.

9. Un semplice conto particolarmente interessante:

$$\begin{aligned}\|v+w\|^2 &= (v+w)'(v+w)\\ &= (v'+w')(v+w)\\ &= v'v+v'w+w'v+w'w\\ &= \|v\|^2+2v'w+\|w\|^2.\end{aligned}$$

Se $v$ e $w$ sono ortogonali, si ha $v'w=0$, e

$$\|v+w\|^2 = \|v\|^2+\|w\|^2,$$

cioe' il Teorema di Pitagora; viceversa, se vale questa uguaglianza, allora $v'w=0$ cioe' $v$ e $w$ sono ortogonali.