Recupero. 2, Determinanti.

1. **Determinanti**

   Consideriamo una matrice

   $$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

   quadrata di ordine n ad elementi in $\mathbb{R}$. Sappiamo che sono equivalenti la affermazioni

   1- tutti i sistemi lineari

   $$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

   che hanno matrice dei coefficienti $A = \left[a_{ij}\right]$ sono determinati.

   2- La matrice $A = \left[a_{ij}\right]$ e' invertibile.

   Ci chiediamo

   sotto quali condizioni sugli elementi a_{ij} cio' accade?

   esiste una formula per la soluzione dei sistemi?

   esiste una formula per la matrice inversa A^{-1}?

2. **Matrici quadrate di ordine 2**

   Consideriamo una matrice

   $$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$$

   quadrata di ordine 2 ad elementi in $\mathbb{R}$, e i sistemi

   $$\begin{cases} a_1x + b_1y = p_1 \\ a_2x + b_2y = p_2 \end{cases}$$

   che hanno A come matrice dei coefficienti.

   Combinando linearmente le due equazioni con due scalari r, s si ottiene l'equazione

   $$r(a_1x + b_1y) + s(a_2x + b_2y) = rp_1 + sp_2.$$

   In particolare:

-possiamo eliminare la y prendendo $r = b_2$ ed $s = -b_1$,

$$b_2(a_1x + b_1y) - b_1(a_2x + b_2y) = b_2p_1 - b_1p_2,$$

e otteniamo

$$(a_1b_2 - a_2b_1)x = b_2p_1 - b_1p_2; \tag{1}$$

dunque, sotto la condizione $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, si ha al piu' un valore della x;

-possiamo eliminare la x prendendo $r = -a_2$ ed $s = a_1$,

$$-a_2(a_1x + b_1y) + a_1(a_2x + b_2y) = -a_2p_1 + a_1p_2,$$

e otteniamo

$$(a_1b_2 - a_2b_1)y = -a_2p_1 + a_1p_2; \tag{2}$$

dunque, sotto la condizione $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, si ha al piu' un valore della y.

Abbiamo cosi' visto che, sotto la condizione

$$a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0,$$

ciascun sistema ha al piu' una soluzione, dove i valori di x e y sono ottenuti dalle (1) e (2). Si verifica che tali valori costituiscono una soluzione.

3. **Determinante di matrici quadrate del II ordine**

   Il determinante di una matrice quadrata del secondo ordine ad elementi in $\mathbb{R}$ e' il numero reale dato dalla differenza fra il prodotto degli elementi sulla diagonale discendente e il prodotto degli elementi sulla diagonale ascendente

   $$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - cb.$$

   Osserviamo che:

   -il determinante di una matrice e' uguale al determinante della sua trasposta;

   -il determinante della matrice unita' del secondo ordine e' 1:

   $$\det(I_2) = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1.$$

4. Significato geometrico.

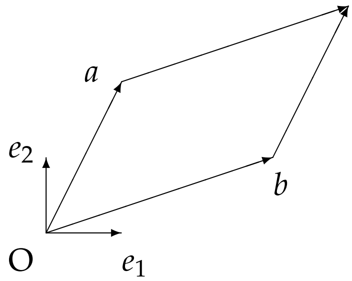
   Data una unita' di misura per le lunghezze, fissiamo nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico, mediante la scelta di due versori (vettori di lunghezza 1) e_1 ed e_2 fra loro ortogonali applicati in uno stesso punto O, ed identifichiamo coppie ordinate in $\mathbb{R}^2$ con vettori del piano applicati in O.

Per ogni sequenza di due vettori $a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2)$ si ha che

$$\det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

e' uguale alla misura con segno dell'area del parallelogramma che chiude la spezzata a, b; il segno e' + o - secondo che la rotazione che porta a in b sia concorde o discorde con la rotazione che porta e_1 in e_2.

(nella figura seguente le due rotazioni sono discordi)



5. Proprieta'.

Possiamo identificare una matrice 2×2 con elementi in $\mathbb{R}$ con la sequenza delle sue due colonne, ciascuna delle quali e' un vettore in $\mathbb{R}^2$:

$$A = \left[\begin{array}{c|c} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} a & b \end{array} \right], \qquad a_i, b_i \in \mathbb{R}, \quad a, b \in \mathbb{R}^2.$$

Siamo cosi' condotti a riguardare il determinante di una matrice quadrata del secondo ordine come una funzione di due variabili in $\mathbb{R}^2$:

$$\det(A) = \det \left[\begin{array}{c|c} a & b \end{array} \right], \qquad a, b \in \mathbb{R}^2.$$

In quest'ottica, il determinante e' caratterizzato dalle seguenti proprieta':

$$\begin{aligned}
\det \left[\begin{array}{c|c} a+c & b \end{array} \right] &= \det \left[\begin{array}{c|c} a & b \end{array} \right] + \det \left[\begin{array}{c|c} c & b \end{array} \right] \\
\det \left[\begin{array}{c|c} a & b+c \end{array} \right] &= \det \left[\begin{array}{c|c} a & b \end{array} \right] + \det \left[\begin{array}{c|c} a & c \end{array} \right] \\
\det \left[\begin{array}{c|c} ra & b \end{array} \right] &= r \det \left[\begin{array}{c|c} a & b \end{array} \right] \\
\det \left[\begin{array}{c|c} a & rb \end{array} \right] &= r \det \left[\begin{array}{c|c} a & b \end{array} \right] \\
\det \left[\begin{array}{c|c} b & a \end{array} \right] &= -\det \left[\begin{array}{c|c} a & b \end{array} \right] \\
\det \left[\begin{array}{c|c} a & a \end{array} \right] &= 0
\end{aligned}$$

per ogni a, b, c vettori in $\mathbb{R}^2$ ed ogni scalare r in $\mathbb{R}$.

Queste proprieta' si verificano facilmente. Ad esempio, la prima proprieta' si puo' verificare cosi':

$$\begin{aligned}
\det \left[\ a + c \mid b\ \right] &= \det \begin{bmatrix} a_1 + c_1 & b_1 \\ a_2 + c_2 & b_2 \end{bmatrix} \\
&= (a_1 + c_1)b_2 - (a_2 + c_2)b_1 = a_1b_2 - a_2b_1 + c_1b_2 - c_2b_1 \\
&= \det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{bmatrix} = \det \left[\ a \mid b\ \right] + \det \left[\ c \mid b\ \right].
\end{aligned}$$

L'ultima proprieta' si verica immediatamente:

$$\det \left[\ a \mid a\ \right] = \det \begin{bmatrix} a_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 \end{bmatrix} = a_1a_2 - a_2a_1 = 0.$$

Poiche' il determinante di una matrice e' uguale al determinate della sua trasposta, valgono analoghe proprieta' del determinante rispetto alle righe.

6. Sistemi.

   Consideriamo una matrice

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} = \left[\ a \mid b\ \right]$$

quadrata di ordine 2 ad elementi in $\mathbb{R}$, e i sistemi

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = p_1 \\ a_2x + b_2y = p_2 \end{cases} \qquad \textit{in sintesi} \quad ax + by = p \qquad (a, b, p \in \mathbb{R}^2)$$

che hanno A come matrice dei coefficienti. Completando l'analisi svolta al punto 2, si prova che:

-ciascuno dei sistemi lineari in esame e' determinato se e solo se

$$\det \left[\ a \mid b\ \right] \neq 0;$$

-sotto questa condizione, la sua soluzione e' data da

$$x = \frac{\det \left[\ p \mid b\ \right]}{\det \left[\ a \mid b\ \right]}$$

$$y = \frac{\det \left[\ a \mid p\ \right]}{\det \left[\ a \mid b\ \right]}$$

Queste formule vengono dette "regola di Cramer" per la risoluzione del sistema.

Esempio.

Consideriamo il sistema
$$\begin{cases} 2x+3y=8 \\ 4x+5y=9 \end{cases}$$
Il determinante della matrice dei coefficienti
$$\det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = 2\cdot 5 - 4\cdot 3 = -2 \neq 0,$$
allora il sistema e′ determinato, e le incognite x, y sono date da
$$x = \frac{\det \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 9 & 5 \end{bmatrix}}{-2} = -\frac{27}{2}$$
$$y = \frac{\det \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}}{-2} = \frac{-14}{-2} = 7$$

7. Matrice inversa.

   Possiamo riformulare il teorema su invertibilita′ e matrice inversa delle matrici quadrate di ordine 2 enunciato in precedenza come segue:

   -una matrice
$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$
   e′ invertibile se e solo se $\det(A) \neq 0$, e in tal caso si ha
$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

8. Determinante e prodotto di matrici.

   Si verifica che

   -il determinante del prodotto di due matrici e′ il prodotto dei determinanti delle due matrici:
$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$
   Cio′ concorda col fatto che $\det(I_2) = 1$, e implica che
$$\det\left(A^{-1}\right) = (\det(A))^{-1}.$$

9. **Determinante di matrici quadrate del III ordine**

   Il determinante di una matrice quadrata del terzo ordine ad elementi in $\mathbb{R}$ e′ il numero reale definito da
$$\det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_1c_2.$$

Questa espressione puo' essere descritta come la somma di tutti i prodotti

$$\pm a_i b_j c_k$$

dove la terna ijk varia fra le permutazioni della terna 123 e il segno e' + o - secondo che il numero di scambi in una trasformazione di ijk in 123 sia pari o dispari. [1] Questa descrizione del determinante di una matrice quadrata di ordine 3 ha il pregio di fare presagire una descrizione del determinante di una matrice quadrata di ordine n qualsiasi.

Un'altra descrizione del determinante di una matrice quadrata di ordine 3 e' data dalla regola di Sarrus, che non fa presagire una corretta descrizione del determinante di una matrice quadrata di ordine n, ma nel caso in esame e' piu' semplice da ricordare.

Secondo questa regola, il determinante viene scritto come

$$\det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - a_3 b_2 c_1 - b_3 c_2 a_1 - c_3 a_2 b_1;$$

questa espressione viene descritta come ottenuta dalla tabella

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_3 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{matrix}$$

sommando i prodotti degli elementi sulle tre diagonali discendenti, col segno +, e i prodotti degli elementi sulle tre diagonali ascendenti, col segno -.

10. Si prova che

    -il determinante di una matrice e' uguale al determinante della sua trasposta.

    Si osserva che:

    -il determinante di una matrice triangolare superiore e' uguale al prodotto degli elementi sulla diagonale discendente:

$$\det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix} = a_1 b_2 c_3;$$

[1] Ad esempio:
$a_1 b_3 c_2$ ha segno - poiche' con 1 scambio (di 2 e 3) si trasforma 132 in 123;
$a_2 b_3 c_1$ ha segno + poiche' con 2 scambi (prima di 2 e 3, poi di 1 e 3) si trasforma 231 in 123;
Ci sono vari modi di trasformare mediante scambi una permutazione ijk di $1, 2, 3$ in 123, ma si prova che il fatto che il numero di scambi sia pari o dispari non dipende dal modo scelto, ma solo dalla permutazione ijk.

in particolare, il determinante della matrice unita' del terzo ordine e' 1:

$$\det(I_3) = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 1.$$

11. Significato geometrico.

    Data una unita' di misura per le lunghezze, fissiamo nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico, mediante la scelta di tre versori (vettori di lunghezza 1) e_1, e_2, e_3 fra loro ortogonali applicati in uno stesso punto O, ed identifichiamo terne ordinate in $\mathbb{R}^3$ con vettori dello spazio applicati in O.

    Per ogni sequenza di tre vettori $a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3)$, $c = (c_1, c_2, c_3)$, si ha che

$$\det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

    e' uguale alla misura con segno del volume del parallelepipedo che chiude i lati a, b, c; il segno e' + se le terne ordinate di vettori a, b, c e e_1, e_2, e_3 sono entrambe destrorse o entrambe sinistrorse, il segno e' - se una terna e' destrorsa e l'altra e' sinistrorsa.

12. **Proprieta'**

    Possiamo identificare una matrice 3×3 con elementi in $\mathbb{R}$ con la sequenza delle sue tre colonne, ciascuna delle quali e' un vettore in $\mathbb{R}^3$:

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c|c} a & b & c \end{array} \right], \qquad a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}^3.$$

    Siamo cosi' condotti a riguardare il determinante di una matrice quadrata del terzo ordine come una funzione di tre variabili in $\mathbb{R}^3$:

$$\det(A) = \det \left[\begin{array}{c|c|c} a & b & c \end{array} \right], \qquad a, b, c \in \mathbb{R}^3.$$

    In quest'ottica, il determinante del terzo ordine e' caratterizzato dalle seguenti proprieta':

$$\begin{aligned}
\det \left[\begin{array}{c|c|c} a+d & b & c \end{array} \right] &= \det \left[\begin{array}{c|c|c} a & b & c \end{array} \right] + \det \left[\begin{array}{c|c|c} d & b & c \end{array} \right] \\
\det \left[\begin{array}{c|c|c} ra & b & c \end{array} \right] &= r\det \left[\begin{array}{c|c|c} a & b & c \end{array} \right] \\
\det \left[\begin{array}{c|c|c} a & b+d & c \end{array} \right] &= \det \left[\begin{array}{c|c|c} a & b & c \end{array} \right] + \det \left[\begin{array}{c|c|c} a & d & c \end{array} \right] \\
\det \left[\begin{array}{c|c|c} a & rb & c \end{array} \right] &= r\det \left[\begin{array}{c|c|c} a & b & c \end{array} \right]
\end{aligned}$$

$$\det\left[\begin{array}{c|c|c} a & b & c+d \end{array}\right] = \det\left[\begin{array}{c|c|c} a & b & c \end{array}\right] + \det\left[\begin{array}{c|c|c} a & b & d \end{array}\right]$$

$$\det\left[\begin{array}{c|c|c} a & b & rc \end{array}\right] = r\det\left[\begin{array}{c|c|c} a & b & c \end{array}\right]$$

$$\det\left[\begin{array}{c|c|c} b & a & c \end{array}\right] = \det\left[\begin{array}{c|c|c} c & b & a \end{array}\right] = \det\left|\begin{array}{c|c|c} a & c & b \end{array}\right] = -\det\left[\begin{array}{c|c|c} a & b & c \end{array}\right]$$

$$\det\left[\begin{array}{c|c|c} a & a & b \end{array}\right] = \det\left[\begin{array}{c|c|c} a & b & b \end{array}\right] = \det\left[\begin{array}{c|c|c} a & b & a \end{array}\right] = 0$$

per ogni a, b, c, d vettori in $\mathbb{R}^3$ ed ogni scalare r in $\mathbb{R}$.

Poiche' il determinante di una matrice e' uguale al determinate della sua trasposta, valgono analoghe proprieta' del determinante rispetto alle righe.

13. Il determinante di una matrice quadrata del terzo ordine si comporta bene rispetto alle operazioni elementari sulle righe della matrice. Precisamente:

    - moltiplicare una riga di una matrice A per uno scalare $r \in \mathbb{R}$ ha per effetto moltiplicare il determinate di A per r;

    - scambiare due righe di A ha per effetto cambiare segno al determinante di A;

    - sommare ad una riga di A un multiplo scalare di un'altra riga di A non ha alcun effetto sul determinante di A, lo lascia invariato. Per semplicita' di scrittura, verifichiamo che sommare alla seconda riga di A un multiplo scalare della prima riga di A non ha alcun effetto sul determinante di A :

$$\begin{aligned}\det\begin{bmatrix} a' \\ \hline b' + ra' \\ \hline c' \end{bmatrix} &= \det\begin{bmatrix} a' \\ \hline b' \\ \hline c' \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} a' \\ \hline ra' \\ \hline c' \end{bmatrix} \\ &= \det\begin{bmatrix} a' \\ \hline b' \\ \hline c' \end{bmatrix} + r\det\begin{bmatrix} a' \\ \hline a' \\ \hline c' \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} a' \\ \hline b' \\ \hline c' \end{bmatrix};\end{aligned}$$

    Dunque possiamo calcolare il determinante di una matrice numerica trasformandola mediante operazioni elementari sulle righe in una matrice triangolare e infine moltiplicando gli elementi diagonali. Ad esempio

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 12 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 2.$$

14. **Sistemi**

    Consideriamo una matrice

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c|c} a & b & c \end{array}\right]$$

quadrata di ordine 3 ad elementi in $\mathbb{R}$, e i sistemi

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = p_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = p_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = p_3 \end{cases} \quad \textit{in sintesi} \quad ax + by + cz = p \qquad (a, b, c, p \in \mathbb{R}^3)$$

che hanno A come matrice dei coefficienti. Si prova che:

-ciascuno dei sistemi lineari in esame e' determinato se e solo se

$$\det \left[\, a \mid b \mid c \,\right] \neq 0;$$

-sotto questa condizione, la sua soluzione e' data da

$$\begin{aligned} x &= \frac{\det \left[\, p \mid b \mid c \,\right]}{\det \left[\, a \mid b \mid c \,\right]} \\ y &= \frac{\det \left[\, a \mid p \mid c \,\right]}{\det \left[\, a \mid b \mid c \,\right]} \\ z &= \frac{\det \left[\, a \mid b \mid p \,\right]}{\det \left[\, a \mid b \mid c \,\right]}. \end{aligned}$$

Queste formule vengono dette "regola di Cramer" per la risoluzione dei sistemi lineari di tre equazioni in tre incognite.

Di seguito mostriamo come questa regola si possa ricavare usando le proprieta' dei determinanti rispetto alle colonne.

Osserviamo che una soluzione del sistema lineare

$$ax + by + cz = p$$

deve essere anche soluzione dell'equazione

$$\det \left[\, ax + by + cz \mid b \mid c \,\right] = \det \left[\, p \mid b \mid c \,\right],$$

al cui primo membro si ha

$$\begin{aligned} &\det \left[\, ax + by + cz \mid b \mid c \,\right] \\ &\qquad = \det \left[\, ax \mid b \mid c \,\right] + \det \left[\, by \mid b \mid c \,\right] + \det \left[\, cz \mid b \mid c \,\right] \\ &\qquad = x \det \left[\, a \mid b \mid c \,\right] + y \det \left[\, b \mid b \mid c \,\right] + z \det \left[\, c \mid b \mid c \,\right] \\ &\qquad = x \det \left[\, a \mid b \mid c \,\right]. \end{aligned}$$

Abbiamo cosi' ottenuto l'equazione nella sola incognita x

$$x \det \left[\, a \mid b \mid c \,\right] = \det \left[\, p \mid b \mid c \,\right];$$

in modo analogo possiamo ottenere l'equazione nella sola incognita y

$$y \det \left[\begin{array}{c|c|c} a & b & c \end{array}\right] = \det \left[\begin{array}{c|c|c} a & p & c \end{array}\right],$$

e l'equazione nella sola incognita z

$$z \det \left[\begin{array}{c|c|c} a & b & c \end{array}\right] = \det \left[\begin{array}{c|c|c} a & b & p \end{array}\right].$$

Se $\det \left[\begin{array}{c|c|c} a & b & c \end{array}\right] \neq 0$, allora possiamo ricavare univocamente ciascuna delle tre incognite e il sistema ha al piu' una soluzione, quella prevista; si verifica che questa e' davvero una soluzione.

15. Matrice inversa, prodotto di matrici.

    Si prova che una matrice A quadrata di ordine 3 e' invertibile se e solo se $\det(A) \neq 0$, e si possono usare i determinanti per dare una formula esplicita per A^{-1}.

    Si prova che il determinante della matrice AB prodotto di due matrici A e B quadrate di ordine 3 e' il prodotto dei determinati delle due matrici:

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

16. **Determinanti di ordine n**

    Il determinante di una matrice quadrata di ordine n ad elementi in $\mathbb{R}$ e' il numero reale definito ponendo

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \sum \pm a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$$

    dove la $n-$plla $i_1 i_2 \dots i_n$ varia fra le permutazioni della $n-$pla $12 \dots n$ e il segno e' + o - secondo che il numero di scambi in una trasformazione di $i_1 i_2 \dots i_n$ in $12 \dots n$ sia pari o dispari.

    Tutte le proprieta' viste nel caso $n = 2, 3$ si estendono al caso generale. In particolare, si ha che per una matrice A quadrata di ordine n le seguenti affermazioni sono equivalenti:

    1- tutti i sistemi lineari $Ax = b$ che hanno matrice dei coefficienti A sono determinati.

    2- La matrice A e' invertibile.

    3- $\det(A) \neq 0$.

    Inoltre, sotto la condizione $\det(A) \neq 0$ si ha una formula esplicita per la soluzione del sistema $Ax = b$, e una formula esplicita per la matrice inversa A^{-1}.