Argomenti svolti nel II modulo.

Integrale di Riemann: definizione, caso delle funzioni continue, I teorema fondamentale. Funzione a gradini su un intervallo chiuso e limitato, suo integrale. Per una funzione limitata su un intervallo chiuso e limitato, integrale inferiore, integrale superiore, integrabilita' e integrale secondo Riemann. Teorema: ciascuna funzione continua e' integrabile. Proprieta' dell'integrale. Integrale di una funzione continua come limite di somme di Cauchy-Riemann. Funzioni primitive di una funzione. I teorema fondamentale del calcolo integrale. **Integrale indefinito, metodi di integrazione.** Proposizione sulla relazione fra le primitive di una stessa funzione definita su un intervallo. Integrale indefinito di una funzione. Integrali elementari. Prime regole di integrazione. Integrazione per parti. Integrazione per sostituzione. **Approfondimenti, funzione integrale, II teorema fondamentale.** Integrali generalizzati. Teorema di Weierstrass. Funzioni continue a tratti. Teorema: ciascuna funzione continua a tratti e' integrabile. Media integrale; teorema della media integrale. Funzione integrale di una funzione, proprieta'. II teorema fondamentale.

Geometria dei sistemi di equazioni lineari in due e tre incognite. Insieme $\mathbb{R}^2$ delle coppie ordinate di numeri reali, somma di due coppie ordinate, prodotto di un numero reale per una coppia ordinata; identificazione di $\mathbb{R}^2$ con l'insieme dei punti del piano e interpretazione geometrica delle operazioni sulle coppie ordinate. Equazioni lineari in due incognite e rette nel piano; sistemi di equazioni lineari in due incognite e intersezione di rette nel piano. Insieme $\mathbb{R}^3$ delle terne ordinate di numeri reali, somma di due terne ordinate, prodotto di un numero reale per una terna ordinata; identificazione di $\mathbb{R}^3$ con l'insieme dei punti dello spazio e interpretazione geometrica delle operazioni sulle terne ordinate. Equazioni lineari in tre incognite e piani nello spazio; sistemi di equazioni lineari in tre incognite e intersezione di piani nello spazio. **Spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ e sistemi di equazioni lineari in n icognite.** Insieme $\mathbb{R}^n$ delle $n-$ple ordinate di numeri reali; somma di due $n-$ple ordinate, prodotto numero reale per $n-$pla ordinata, proprieta'; spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$. Combinazioni lineari. Vettori canonici di $\mathbb{R}^n$. Applicazioni lineari da $\mathbb{R}^n$ ad $\mathbb{R}$, e loro caratterizzazione. Equazioni lineari in n incognite, soluzioni. Sistemi di m equazioni lineari in n incognite, coefficienti, termini noti, soluzioni; sistema impossibile, determinato, indeterminato, sistemi equivalenti; matrice di un sistema. **Sistemi lineari di n equazioni in n incognite, un metodo per la risoluzione.** Operazioni elementari sulle equazioni di un sistema, sistemi lineari triangolari; operazioni elementari sulle righe di una matrice, matrici triangolari. Processo di eliminazione, per stabilire se un sistema lineare di n equazioni in n incognite e' determinato e in caso affermativo determinarne la soluzione. Teorema sui sistemi lineari di n equazioni in n incognite aventi la stessa matrice dei coefficienti.

Algebra delle matrici. Vettori, colonne, righe; prodotto riga per colonna; rappresentazione sintetica $a'x = 0$ di equazioni lineari. Matrici, tipo di una matrice, notazioni, notazione Matlab. Prodotto di due matrici; rappresentazione sintetica $Ax = b$ di sistemi lineari. Matrici unita'. Proprieta' associativa. Noncommutativita'. Matrice inversa di una matrice quadrata; unicita'. Proprieta' dell'inversione. Teorema sui sistemi lineari $Ax = b$ con matrice dei coefficienti A quadrata invertibile. Teorema sulle matrici quadrate A tali che tutti i sistemi $Ax = b$ siano determinati. Algoritmo di Gauss-Jordan per stabilire se una matrice e' invertibile e in caso affermativo determinarne l'inversa. Prodotto di uno scalare per una matrice. Proposizione sulla invertibilita' e sull'inversa di una matrice quadrata di ordine due. Potenze ad esponente naturale e intero relativo di una matrice quadrata, proprieta'. Somma di matrici, proprieta'. Proprieta' distributive del prodotto rispetto alla somma di matrici. Espressioni matriciali.

Sistemi lineari di m equazioni in n incognite, un metodo per la risoluzione. Sistema a scala, matrice a scala. Processo di eliminazione, per stabilire se un sistema lineare di m equazioni in n incognite ha soluzioni e in caso affermativo determinarle. Proposizione sui sistemi lineari con meno equazioni che incognite. Sistema lineare omogeneo, soluzione banale. Proposizione sui sistemi lineari omogenei con meno equazioni che incognite. Proposizione sulla relazione fra l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare e l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato. **Sottospazi di $\mathbb{R}^n$**. Definizione di sottospazio di $\mathbb{R}^n$. Esempi tipici: insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo in n incognite, insieme delle combinazioni lineari di (un numero finito di) vettori di $\mathbb{R}^n$. Sottospazio generato da un insieme di vettori; sistemi di generatori di un sottospazio. Proposizione: ogni sottospazio di $\mathbb{R}^n$ si puo' rappresentare sia come insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo in n incognite, sia come insieme delle combinazioni lineari di un numero finito di vettori di $\mathbb{R}^n$. **Vettori linearmente indipendenti, basi, coordinate.** Proposizione su un sistema di generatori di un sottospazio nel quale un vettore sia combinazione lineare degli altri. Definizione di sequenza di vettori linearmente dipendente o indipendente. Proposizione: ogni sottospazio possiede un sistema di generatori linearmente indipendente. Definizione di base di un sottospazio. Coordinate di un vettore di un sottospazio rispetto a una base del sottospazio; identificazione di un sottospazio, avente una base formata da p vettori, con lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^p$. **Basi, dimensione.** Proposizione su una sequenza di vettori nella quale nessun vettore e' combinazione lineare dei precedenti. Teorema di caratterizzazione della dipendenza o indipendenza lineare di una sequenza di vettori. Operazioni sui vettori dello spazio applicati in un punto fissato, spazio vettoriale geometrico; descrizione degli insiemi linearmente indipendenti, dei sistemi di generatori, delle basi. Combinazioni lineari di dati p vettori di $\mathbb{R}^n$ che risultano in un dato vettore di $\mathbb{R}^n$ e sistemi lineari di n equazioni in p incognite. Teorema sul numero dei vettori in una sequenza che sia linearmente indipendente, o sistema di generatori di $\mathbb{R}^n$, o base di $\mathbb{R}^n$. Teorema sulle sequenze di n vettori in $\mathbb{R}^n$. Teorema: tutte le basi di uno stesso sottospazio sono formate dallo stesso numero di vettori. Dimensione di un sottospazio. Proposizione sulla dimensione del sottospazio generato da un insieme di vettori.

Ortogonalita' e proiezioni ortogonali nel piano e nello spazio. Relazione di ortogonalita' sull'insieme dei vettori del piano applicati in un punto O, e sua rappresentazione in coordinate; proiezione ortogonale di un vettore applicato in O su una retta per O, definizione e relativa formula, coefficiente di Fourier. Relazione di ortogonalita' sull'insieme dei vettori dello spazio applicati in un punto O, e sua rappresentazione in coordinate; proiezione ortogonale di un vettore applicato in O su una piano per O, definizione e relativa formula. **Spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^n$, complemento ortogonale di un sottinsieme, proiezione ortogonale su un sottospazio.** Prodotto interno standard su $\mathbb{R}^n$, proprieta'; spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^n$. Definizione della relazione di ortogonalita' fra due vettori di $\mathbb{R}^n$, proprieta'. Trasposta di una matrice, proprieta'; caratterizzazione delle matrici A tali che $A'A$ sia invertibile. Complemento ortogonale di un sottinsieme di $\mathbb{R}^n$; caso di un vettore, o di un numero finito di vettori. Proiezione ortogonale di un vettore su un sottospazio, e relativa formula. Dimensione del complemento ortogonale di un sottospazio. **Spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^n$; norma di un vettore.** Per vettori del piano applicati in un punto O, lunghezza, sue proprieta'; formula per la lunghezza in coordinate. Per vettori dello spazio applicati in un punto O, formula per la lunghezza in coordinate. Definizione di norma di un vettore in $\mathbb{R}^n$, proprieta'. Teorema di Pitagora.

Determinanti. Determinante di una matrice quadrata di ordine 2; significato geometrico. Proprieta' rispetto alle colonne (righe). Caratterizzazione dei sistemi lineari di due equazioni in due incognite determinati, regola di Cramer. Invertibilita' e inversa di una matrice quadrata di ordine due. Determinante e prodotto di matrici. Determinante di una matrice quadrata di ordine 3, definizione, regola di Sarrus; significato geometrico. Proprieta' rispetto alle colonne (righe). Caratterizzazione dei sistemi lineari di tre equazioni in tre incognite determinati, regola di Cramer. Determinante $\det(A)$ di una matrice A quadrata di ordine n, definizione. Teorema: per una matrice A quadrata di ordine n sono equivalenti: (1) tutti i sistemi lineari $Ax = b$ sono determinati; (2) A e' invertibile; (3) $\det(A) \neq 0$.