Matematica- Esercizi per Prova parziale - Traccia di risoluzione

Di seguito riportiamo una risoluzione per ciascuno degli esercizi dati come indicativi di quelli della prova parziale. Talvolta verranno riportati solo alcuni passaggi, e verra' lasciato al lettore il compito di fornire i passaggi intermedi.

Nella risoluzione della prova scritta, sara' chiesto di riportare un insieme di passaggi sufficiente per motivare le affermazioni via via fatte.

1. Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+xe^x+1}{1+xe^x+e^{2x}}$$
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+xe^x+1}{1+xe^x+e^{2x}}$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{1-e^{-x}}{\sin(x)}$$

Svolgimento

I limite.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+xe^x+1}{1+xe^x+e^{2x}} = \frac{+\infty}{+\infty} = forma\ di\ indecisione$$

[fornire passaggio intermedio].

Mettiamo in evidenza i termini che tendono piu' velocemente a $+\infty$

$$\frac{x^2+xe^x+1}{1+xe^x+e^{2x}} = \frac{xe^x\left(\frac{x}{e^x}+1+\frac{1}{xe^x}\right)}{e^{2x}\left(\frac{1}{e^{2x}}+\frac{x}{e^x}+1\right)} = \frac{x}{e^x}\cdot\frac{\frac{x}{e^x}+1+\frac{1}{xe^x}}{\frac{1}{e^{2x}}+\frac{x}{e^x}+1}$$
$$\to\ 0^+\cdot\frac{0+1+0}{0+0+1} = 0^+$$

II limite.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+xe^x+1}{1+xe^x+e^{2x}} = \frac{+\infty+(-\infty)\cdot 0^+ +1}{1+(-\infty)\cdot 0^+ + 0^+}.$$

A numeratore e denominatore il termine xe^x porge la forma di indecisione $(-\infty)\cdot 0^+$; si ha

$$\lim_{x\to-\infty} xe^x = \lim_{x\to-\infty} -\frac{-x}{e^{-x}} = \lim_{y\to+\infty} -\frac{y}{e^y} = -0^+ = 0^-.$$

Ora,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+xe^x+1}{1+xe^x+e^{2x}} = \frac{+\infty+0^- +1}{1+0^- +0^+} = +\infty.$$

III limite.
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{-x}}{\sin(x)}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-e^{-x}}{x}\cdot\frac{x}{\sin(x)}\right).$$
Si ha
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1}{-x}=\lim_{y\to 0}\frac{e^{y}-1}{y}=1$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin(x)}=1,$$
dunque
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-e^{-x}}{x}\cdot\frac{x}{\sin(x)}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{-x}}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin(x)}=1\cdot 1=1.$$
In definitiva,
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{-x}}{\sin(x)}=1.$$

2. Si consideri la funzione
$$f(x)=\ln^2[\sin(x^2)]$$
Si determini un intorno di 0 nel quale f e' definita; in tale intorno f e derivabile? perche'? si calcoli la funzione derivata $\mathrm{D}f(x)$.

Svolgimento ———————————————

La funzione
$$f(x)=\ln^2[\sin(x^2)]$$
e' definita per ogni x tale che
$$\sin(x^2)>0;$$
questa condizione e' certamente soddisfatta se $0<x^2<\pi$, cioe' se $-\sqrt{\pi}<x<\sqrt{\pi}$. Dunqure la funzione f e' certamente definita in $I=]-\sqrt{\pi},\sqrt{\pi}[$ che e' un intorno di 0. Ora, la funzione
$$f:I\to\mathbb{R},\quad x\mapsto\ln^2[\sin(x^2)]$$
puo' essere scomposta come composizione di funzioni derivabili sui loro domini, e dunque e' derivabile su I [si scriva questa scomposizione di f].

Si ha
$$\begin{aligned}\mathrm{D}\ln^2[\sin(x^2)]&=2\ln[\sin(x^2)]\cdot\mathrm{D}\ln[\sin(x^2)]\\&=2\ln[\sin(x^2)]\cdot\frac{1}{\sin(x^2)}\cdot\mathrm{D}\sin(x^2)\\&=2\ln[\sin(x^2)]\cdot\frac{\cos(x^2)}{\sin(x^2)}\cdot\mathrm{D}x^2\\&=2\ln[\sin(x^2)]\cdot\frac{\cos(x^2)}{\sin(x^2)}\cdot 2x\end{aligned}$$

3. E' data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 4x + 5 & per\ x \geq 0 \\ \sin(ax) + b & per\ x < 0 \end{cases}$$

dove a, b sono parametri in $\mathbb{R}$. Determinare a, b in modo che f sia continua in 0; determinare a, b in modo che f sia derivabile in 0. La funzione cosi' ottenuta e' derivabile su $\mathbb{R}$? in caso affermativo si scriva la funzione derivata di f.

Svolgimento ———————————————————

Continuita' di f in 0. La funzione f e' definita in un intorno bilatero di 0, dunque f e' continua in 0 se e solo se esistono e sono uguali fra loro i limiti di $f(x)$ per x che tende a 0^- e 0^+. Da una parte si ha

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \left(3x^2 + 4x + 5\right) = 5,$$

e dall'altra si ha

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (\sin(ax) + b) = b.$$

Dunque la funzione f e' continua in 0 se e solo se $b = 5$ (a e' libero di assumere qualsiasi valore).

Derivabilita' di f in 0. Per essere derivabile in 0, la funzione f deve essere almeno continua in 0. Dunque

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 4x + 5 & per\ x \geq 0 \\ \sin(ax) + 5 & per\ x \leq 0 \end{cases}$$

dove a e' un parametro in $\mathbb{R}$. [la seconda condizione $x > 0$ e' stata riscritta $x \geq 0$; si provi che cio' e' lecito].

La funzione f e' definita in un intorno bilatero di 0, dunque f e' derivabile in 0 se e solo se esistono e sono uguali fra loro le derivate sinistra e destra di $f(x)$ in 0. Da una parte per ogni $x \leq 0$ si ha

$$\mathrm{D}_- f(x) = \mathrm{D}_- \left(3x^2 + 4x + 5\right) = 6x + 4$$

da cui

$$f'_-(0) = (\mathrm{D}_- f(x))_{x=0} = 4;$$

dall'altra per ogni $x \geq 0$ si ha

$$\mathrm{D}_+ f(x) = \mathrm{D}_+ \left(sin(ax) + 5\right) = a\cos(ax)$$

da cui

$$f'_+(0) = (\mathrm{D}_+ f(x))_{x=0} = a;$$

dunque la funzione f e' derivabile in 0 se e solo se $a = 4$ e $b = 5$.

[Per verifica, si svolga questa parte dell'esercizio calcolando la derivata sinistra e la derivata destra di f in 0 come limiti di rapporti incrementali.]

Derivabilita' su $\mathbb{R}$. Per $a = 4$ e $b = 5$ la funzione diviene

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 4x + 5 & per\ x \geq 0 \\ \sin(4x) + 5 & per\ x \leq 0 \end{cases}.$$

Per come e' stata determinata, f e' derivabile in 0, e si ha $(\mathrm{D}f(x))_{x=0} = 4$.

Sull'intervallo $]-\infty, 0]$ la funzione f coincide con la funzione $x \mapsto 3x^2 + 4x + 5$, che e' derivabile su tale intervallo, e si ha $\mathrm{D}f(x) = \mathrm{D}\left(3x^2 + 4x + 5\right) = 6x + 4$ su tale intervallo.

Sull'intervallo $]0, +\infty[$ la funzione f coincide con la funzione $x \mapsto \sin(4x) + 5$, che e' derivabile su tale intervallo, e si ha $\mathrm{D}f(x) = \mathrm{D}(\sin(4x) + 5) = 4\cos(4x)$ su tale intervallo.

Dunque la funzione f e' derivabile su $\mathbb{R}$, e si ha

$$\mathrm{D}f(x) = \begin{cases} 6x + 4 & per\ x \geq 0 \\ 4\cos(4x) & per\ x \leq 0 \end{cases}.$$

4. E' data la funzione

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{3}.$$

Determinare: il dominio naturale di f; gli intervalli in cui f e' crescente/ decrescente; gli eventuali punti di massimo/ minimo locale e globale di f; gli intervalli in cui f ha concavita' rivolta verso l'alto/ il basso; gli eventuali punti di flesso per f.

Si dia una rappresentazione del grafico di f. Si dica se l'equazione $f(x) = 0$ ha soluzioni e in caso affermativo quante.

Svolgimento ———————————————

Dominio naturale di f. E' l'intervallo $]0, +\infty[$.

Intervalli in cui f e' crescente/ decrescente; eventuali punti di massimo/ minimo locale e globale di f. La funzione f essendo ottenuta mediante operazioni aritmetiche dalle funzioni $\ln(x)$, x, costanti che sono derivabili sull'intervallo $]0, +\infty[$ e' anch'essa derivabile su tale intervallo. Si ha

$$\mathrm{D}f(x) = \mathrm{D}\left(\frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}.$$

Il segno della derivata di f, e la crecenza, decrescenza di f sono riportate nella seguente tablella

x		e	
segno di $f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

Dunque la funzione f

- e' crescente su $]0, e]$

- ha un punto di massimo locale in e

- e' decrescente su $[e, +\infty[$

Il punto $x = e$ e' un punto di massimo globale per f; il corrispondente massimo globale di f e' $f(e) = \frac{1}{e} - \frac{1}{3} > 0$.

f non ha punti di minimo globale [si motivi questa affermazione].

Intervalli in cui f ha concavita' rivolta verso l'alto/ il basso; eventuali punti di flesso per f.

La funzione f e' derivabile due volte sul suo dominio naturale, e si ha

$$D^2 f(x) = D\, \frac{1 - \ln(x)}{x^2} = \frac{-3 + 2\ln(x)}{x^3}.$$

Il segno della derivata seconda di f, la concavita' e i punti di flesso sono riportati nella seguente tablella

x		$e^{\frac{3}{2}}$	
segno di $f''(x)$	$+$	0	$-$
concavita' di $f(x)$	$\frown$		$\smile$

Dunque la funzione f

- ha concavita' verso l'alto su $]0, e^{\frac{3}{2}}]$

- ha un punto di flesso in $e^{\frac{3}{2}}$

- ha concavita' verso il basso su $[e^{\frac{3}{2}}, +\infty[$

Si lascia al lettore di dare una rappresentazione del grafico di f coerente con queste informazioni, e rispondere all'ultima domanda.

5. Usando la definizione, si verifichi che seguente successione diverge a $+\infty$.

$$\frac{n^2}{n+1}$$

Svolgimento ———————————————

Dobbiamo verificare che per ogni numero reale H esiste un indice a partire dal quale tutti i termini della successione sono maggiori di H; chiaramente possiamo limitarci agli $H > 0$.

Consideriamo dunque la disequazione

$$\frac{n^2}{n+1} > H$$

e verifichiamo che per ogni $H > 0$ possiamo trovare un intero naturale $N = N(H)$ tale che questa disequazione e' soddisfatta per ogni $n \geq N$.
La disequazione e' equivalente alla

$$n^2 - nH - H > 0$$

[si dia motivazione di questa equivalenza.]
Il trinomio di II grado $n^2 - nH - H$ ha discriminante $H^2 + 4H$, sempre positivo sotto la condizione $H > 0$; dunque la disequazione e' soddisfatta per

$$n < \frac{H - \sqrt{H^2 + 4H}}{2}, \quad oppure \quad n > \frac{H + \sqrt{H^2 + 4H}}{2}.$$

Basta quindi prendere

$$N = N(H) = un\ qualsiasi\ intero\ naturale\ > \frac{H + \sqrt{H^2 + 4H}}{2}.$$