Matematica - 12 gennaio 2015

versione X

Scrivere nome, cognome e numero di matricola.

Non e' consentito usare libri, appunti, calcolatrici, ... Riportare un insieme di passaggi sufficiente per motivare le affermazioni via via fatte.

Tempo: 1h 30'.

1. Determinare, se esistono, i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{5-6x}{2x-3x^2}; \qquad \lim_{x\to 0} \frac{5-6x}{2x-3x^2};$$
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x-x}{x-\ln(x)} \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x-x}{x-\ln(x)}$$

2. E' data la funzione
$$f(x) = \ln(\ln(x)).$$
Si determini l'insieme sul quale e' f definita, la funzione derivata di f, e la funzione derivata seconda di f. Si scriva l'equazione della retta tangente al grafico di f nel suo punto di ascissa e.

3. E' data la funzione
$$f(x) = \begin{cases} -(x+1)^2 + c & per\ x \le 0 \\ (x-1)^2 & per\ x > 0 \end{cases}$$
dove c e' un parametro in $\mathbb{R}$. Si determini se possibile c in modo che f sia continua in 0. Per tale valore di c si determinino, usando la definizione, la derivata destra e la derivata sinistra di f in 0, e si stabilisca se f e' derivabile in 0.

4. E' data la funzione
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{2x^3-9x^2+12x}.$$
Si determinino: i limiti di $f(x)$ per x che tende a $+\infty$ e $-\infty$; gli intervalli in cui f e' crescente/decrescente; gli eventuali punti di massimo e minimo locali per f, specificando se siano globali o meno. Si dia una rappresentazione del grafico di f coerente con i risultati trovati. Si stabilisca se l'equazione $f(x) = e^{9/2}$ ha soluzioni e in caso affermativo quante.

5. E' data la successione
$$a_n = \frac{2n+3}{4n+5}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$
Si determini il limite di a_n per n che tende a $+\infty$; si verifichi il risultato trovato, usando la definizione; si determini un intero N a partire dal quale i termini della successione distano dal limite per meno di $1/100$.