Matematica - 26 gennaio 2015

versione X

Scrivere nome, cognome e numero di matricola.

Non e' consentito usare libri, appunti, calcolatrici, ... Riportare un insieme di passaggi sufficiente per motivare le affermazioni via via fatte.

Tempo: 1h 30'.

1. Determinare, se esistono, i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}; \qquad \lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x-1};$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} - x^2 \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} + \ln(x)$$

2. E' data la funzione
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+9}-4}.$$
Si determini l'insieme sul quale e' f definita, e la funzione derivata di f. Si scriva l'equazione della retta tangente al grafico di f nel suo punto di ascissa 4.

3. E' data la funzione
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2} & per\ x < 0 \\ 1 & per\ x = 0 \\ \frac{1}{1+cx} & per\ x > 0 \end{cases}$$
dove c e' un parametro in $\mathbb{R}$. Usando la definizione, si determinino se possibile la derivata destra e la derivata sinistra di f in 0, e si determini c in modo che f sia derivabile in 0. Per tale valore di c si stabilisca se la funzione f e' derivabile su $\mathbb{R}$ e in caso affermativo si scriva la funzione derivata di f.

4. E' data la funzione
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^4 - 4x^3 + 21.$$
Si determinino: i limiti di $f(x)$ per x che tende a $+\infty$ e $-\infty$; gli intervalli in cui f e' crescente/decrescente; gli eventuali punti di massimo e minimo locali per f, specificando se siano globali o meno; gli intervalli nei quali la funzione f ha concavita' rivolta verso l'alto/basso; gli eventuali punti di flesso per f. Si dia una rappresentazione del grafico di f coerente con i risultati trovati. Si stabilisca se l'equazione $f(x) = 0$ ha soluzioni e in caso affermativo quante.

5. E' data la successione
$$a_n = \frac{2 \cdot 10^n}{10^n + 1}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$
Si determini il limite di a_n per n che tende a $+\infty$; si verifichi il risultato trovato, usando la definizione.